Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2021/12/07

Chapitre VI

Intégration numérique

Plan

Bibliographie

On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

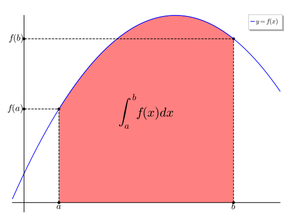


Figure: Représentation de $\int_a^b f(x)dx$ (aire de la surface colorée)

Definition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{1}$$

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$ distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \tag{2}$$

Definition

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p.

Plan

Formule du rectangle à gauche

$$f(x) \approx f(a)$$

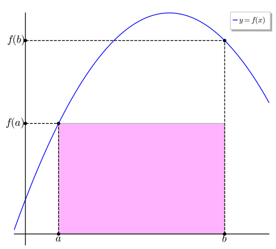


Figure: Formule du rectangle à gauche : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f,a,b) = (b-a)f(a)$ (aire de la surface colorée)

Formule du rectangle à droite

$$f(x) \approx f(b)$$

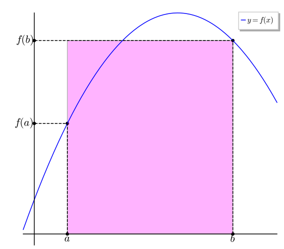


Figure: Formule du rectangle à droite : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f,a,b) = (b-a)f(b)$ (aire de la surface colorée)

Formule du point milieu

$$f(x) \approx f((a+b)/2)$$

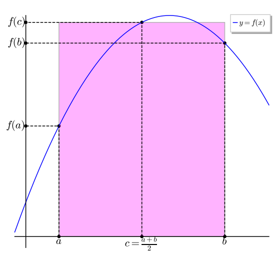


Figure: Formule du point milieu : $\int_a^b f(x)dx \approx \mathcal{Q}_0(f,a,b) = (b-a)f((a+b)/2)$ (aire de la surface colorée)

Exercice 1.1

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

Exercice 1.2

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La *précision* de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

En approchant la fonction f par des polynômes d'interpolation de degré $\geqslant 1$.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$).
On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i). \tag{3}$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)$
est de degré d'exactitude k.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

La formule de quadrature élémentaire (1) à $n+1$ points est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{4}$$

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a,b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $n+1$ points de degré d'exactitude n au moins.

Exercice 1.3:

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a,b]$ ($a < b$). Ecrire une fonction algorithmique WeightsFromPoints permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.7. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\boldsymbol{x} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

$$(b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points (distincts deux à deux et ordonnés). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5}$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux).
La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{6}$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b-a)$.
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx \tag{7}$$

Exercice 1.4:

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in [\![0,n]\!]$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$

Q. 1

Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{L}_i((a+b)-x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

Q. 2

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt,\quad \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad w_i = w_{n-i}$$

Lemme 1.1

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}dx,\quad \forall i \in [\![0,n]\!]$$

On a alors

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins n si n est impaire et au moins $n+1$ sinon.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Proposition:

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ défini par (1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n. Elle est alors de degré d'exactitude $n+m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = 0,\ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{8}$$

où π_n est le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{9}$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points est $2n+1$.
De plus, on a

$$(8) \iff \int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0,\ \forall k \in [\![0, m-1]\!]. \tag{10}$$

Avec une **discrétisation régulière** de l'intervalle $[a,b]$:
Méthode de Newton-Cotes.

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme $\int_a^b w(x)f(x)dx$:

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- méthode de Gauss-Legendre,
- méthode de Gauss-Jacobi,
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

Plan

Proposition

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$. Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

où les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont donnés par (6).
Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal n si n est impair et $n+1$ sinon.

n	**ordre**	w_i (poids)									**nom**
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$							Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$					Villarceau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$			Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$		?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$	?

Table: Méthodes de Newton-Cotes

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \qquad (11)$$

Calcul des coefficients w_i? :

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \qquad (11)$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode** 1 **:**
Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$: on résoud le système

$$\left\{\begin{array}{lcll} w_0 + w_1 + w_2 & = & 1, & (f \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 & = & \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = a+h, & (f \\ a^2w_0 + (a+h)^2w_1 + (a+2h)^2w_2 & = & \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(3a^2 + 6ah + 4h^2), & (f \end{array}\right.$$

Mais il y a plus simple ...

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \qquad (11)$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode** 2 **:**
Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$ et les w_i ne dépendent pas de l'intervalle $[a, b]$: on peut les calculer sur l'intervalle $[0, 1]$ en résolvant le système

$$\left\{\begin{array}{lcll} w_0 + w_1 + w_2 & = & 1, & (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2}w_1 + 1 \times w_2 & = & \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, & (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + (\frac{1}{2})^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 & = & \int_0^1 x^2dx\frac{1}{3}, & (f(x) = x^2). \end{array}\right.$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \qquad (11)$$

Calcul des coefficients w_i? : **Méthode** 3 **:** $\forall i \in [\![0, n]\!]$

$$w_i = \int_0^1 L_i(t)dx, \quad \text{avec } L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{nt-j}{i-j}$$

$$\begin{array}{lcl} L_0(t) & = & \frac{2t-1}{-1}\frac{2t-2}{-2} = (2\,t-1)(t-1) \\ L_1(t) & = & \frac{2t}{1}\frac{2t-2}{-1} = -4\,(t-1)t \\ L_2(t) & = & \frac{2t}{2}\frac{2t-1}{1} = (2\,t-1)t \end{array}$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \qquad (11)$$

Degré d'exactitude 3 **:** au moins ordre 3

$$\int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6}\left(0^4 + 4(\frac{1}{2})^4 + 1^4\right) = \frac{5}{24}$$

Exercice 1.5:

Q. 1

Ecrire une fonction algorithmique WeightsPointsNC *retournant les* $(n+1)$ *points et les* $(n+1)$ *poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

Q. 2

Ecrire une fonction algorithmique QuadElemNC *retournant la valeur de* $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ *correpondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

Sage http://www.sagemath.org/

```
sage: %paste
var('t')
def BaseLagrange(n,i):
  L=1
  for j in range(n+1):
    if i!=j:
      L=L*(n*t-j)/(i-j)
  return L

def NewtonCotes(n):
  W=[];
  for i in range(n+1):
    W.append(integrate(BaseLagrange(n,i),t,0,1))
  return W

## -- End pasted text --
t
sage: NewtonCotes(3)
[1/8, 3/8, 3/8, 1/8]
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage:
```


Problème lorsque n devient grand! : illustration sur un exemple simple.
Soit $f(x) = 3x + 2$, $a = 0$ et $b = 1$.

- Les formules de Newton-Cotes à $n + 1$ points, $n \geqslant 1$, sont exactes car f est un polynôme de degré 1.
- les poids $(w_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or x_i et w_i sont approchés à $\approx 1e-16$ près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad w_i \approx \tilde{w}_i$$

- **Newton-Cotes exacte** : $\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
- **Newton-Cotes approchée** : $\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$

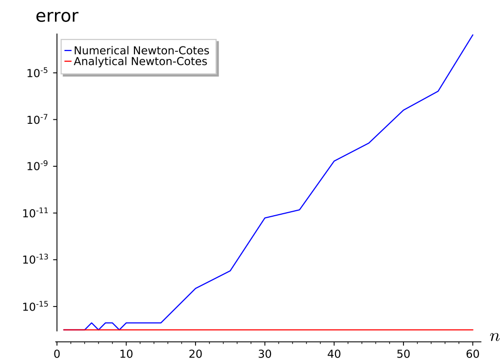


Figure: Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

Remarque 1.2

Pour les méthode de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grandes erreurs. Au delà de $n = 7$, des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert![1]

[1] Traduction : utiliser la relation de Chasles

Plan

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $2n + 1$?
Pour celà il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^{n}$ appartenant à $[a, b]$ distincts 2 à 2.

Exercice 1.6:

Q. 1

Déterminer les points t_0, t_1 de l'intervalle $[-1,1]$ et les poids w_0, w_1 tel que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2

En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ qui soit de degré d'exactitude 3.

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $2n+1$?

Oui pour $n=1$! Et pour $n>1$?

Pour cela il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^n$ appartenant à $[a,b]$ distincts 2 à 2. Les **polynômes de Legendre** vont être d'une grande utilité!

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t),\ \forall n \geqslant 1 \tag{12}$$

avec $\mathrm{P}_0(t)=1$ et $\mathrm{P}_1(t)=t$.
On a les propriétés suivantes:

- le polynôme de Legendre P_n est de degré n,
- la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,
- pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, on a
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{13}$$
ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire
$$\langle \mathrm{P}_m,\mathrm{P}_n\rangle = \int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx.$$
- Pour $n\geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire
$$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i),\ C\in\mathbb{R}^*$$
où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]a,t0[$, $]t_0,t_1[$, $\ldots$, $]t_{n-2},t_{n-1}[$, $]t_{n-1},b[$.

Proposition:

Soit $(t_i)_{i=0}^n$ les $n+1$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i\in[\![0,n]\!]$ et w_i les poids donnés par (6). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

n	exactitude	w_i (poids)	t_i (points)
0	1	1	0
1	3	$1/2, 1/2$	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	$5/18, 8/18, 5/18$	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table: Méthodes de Gauss-Legendre sur $[-1,1]$

Théorème:

Soient $f\in\mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 5.14. Alors on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(2n+2)}\right\|_\infty}{(2n+2)!}\int_a^b \pi_n(x)^2dx \tag{14}$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

Exercice 1.7

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1,1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1}(t)$. Cette formule à pour degré d'exactitude $2n+1$.
Soient $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|\mathrm{P}\| = \langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle^{1/2}$ la norme associée.
Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1

Montrer que

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t),\quad n>1 \tag{1}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \text{ et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

On définit le vecteur $\boldsymbol{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t),\ldots,\mathrm{M}_n(t))^t.$$

Q. 2

Montrer que l'on a

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{2}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1,\ldots,c_n$. Le vecteur $\boldsymbol{e}_{n+1}$ étant le $(n+1)$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 3

En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $\mathrm{M}_{n+1}\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.

Q. 4

Montrer que

$$\sum_{k=0} w_k\mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k) = \delta_{i,j},\ \forall(i,j)\in[\![0,n]\!]^2 \tag{3}$$

où $\delta_{i,j}=0$, si $i\neq j$ et $\delta_{i,i}=1$.

On note $\mathbb{W}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0,\ldots,w_n)$ et $\mathbb{P}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = \mathrm{M}_j(t_i)$, $\forall(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$.

Q. 5

- *Montrer que $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.*
- *En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.*
- *En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^n(\mathrm{M}_k(t_i))^2$, $\forall i\in[\![0,n]\!]$.*

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** $\textsc{eig}(\mathbb{A})$ retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 6

- *Ecrire la fonction $[\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}] \leftarrow \textsc{GaussLegendre}(n)$ retournant le tableau des points $\boldsymbol{t}$ et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.*
- *Ecrire la fonction $I \leftarrow \textsc{QuadElemGaussLegendre}(f,a,b,n)$ retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur l'intervalle $[a,b]$.*

Plan

Definition 1.3

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ une subdivison de l'intervalle $[\alpha,\beta]$:

$$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=\beta.$$

On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{i=1}^k\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)dx. \qquad (15)$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g,a,b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points d'ordre p donnée par

$$\mathcal{Q}_n(g,a,b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}(b-a)\sum_{j=0}^n w_j g(x_j)\approx\int_a^b g(x)dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée à** $\mathcal{Q}_n$, notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}(f,\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^k\mathcal{Q}_n(f,\alpha_{i-1},\alpha_i)\approx\int_\alpha^\beta f(x)dx \qquad (16)$$

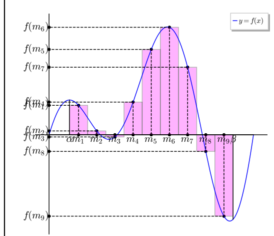
$\mathcal{Q}_n$ ordre $p\Rightarrow\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$ ordre p

Formule composite des points milieux

$$\mathcal{Q}_0(g,a,b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}(b-a)g(\frac{a+b}{2})$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1},\alpha_j]$,

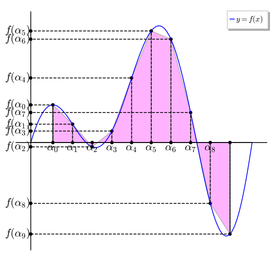
$$m_j=\frac{\alpha_{j-1}+\alpha_j}{2}$$



$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{j=1}^k\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx\approx\sum_{j=1}^k\mathcal{Q}_0(f,\alpha_{j-1},\alpha_j)=h\sum_{j=1}^k f(m_j)$$

Formule composite des trapèzes

$$\mathcal{Q}_1(g,a,b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{b-a}{2}(g(a)+g(b))$$



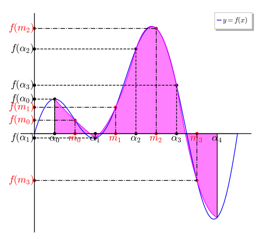
$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{j=1}^k\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx &\approx \sum_{j=1}^k\mathcal{Q}_0(f,\alpha_{j-1},\alpha_j)\\ &\approx \frac{h}{2}\sum_{j=1}^k(f(\alpha_{j-1})+f(\alpha_j))\end{aligned}$$

Formule composite de Simpson

$$\mathcal{Q}_2(g,a,b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{b-a}{6}(g(a)+4g(\tfrac{a+b}{2})+g(b))$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1},\alpha_j]$,

$$m_j=\frac{\alpha_{j-1}+\alpha_j}{2}$$



$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta=\sum_{j=1}^k\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx &\approx \sum_{j=1}^k\mathcal{Q}_2(f,\alpha_{j-1},\alpha_j)\\ &\approx \frac{h}{6}\sum_{j=1}^k(f(\alpha_{j-1})+4f(m_j)+f(\alpha_j))\end{aligned}$$

Exercice 1.8:

Ecrire une fonction algorithmique QuadSimpson retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f. On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g,a,b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{b-a}{6}(g(a)+4g(\frac{a+b}{2})+g(b)).$$

Plan

$$\mathcal{E}^{\text{comp}}_{\alpha,\beta}(f) = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta). \tag{17}$$

On a alors

$$\mathcal{E}^{\text{comp}}_{\alpha,\beta}(f) = \sum_{j=1}^{k}\left(\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,\alpha_{j-1},\alpha_j)\right) = \sum_{j=1}^{k}\mathcal{E}_{\alpha_{j-1},\alpha_j}(f)$$

et on a vu que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|\int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx$$

Si x_i **discrétisation régulière** de $[a,b]$, on peut démontrer (voir [?])

$$\max_{x\in[a,b]}|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)| \leqslant C\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}\log(n)}(b-a)^{n+1}.$$

En notant $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$, $h = \max_{j\in[\![1,k]\!]} h_j$ et $K_n = C\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}\log(n)}$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}^{\text{comp}}_{\alpha,\beta}(f)| &\leqslant \sum_{j=1}^{k}|\mathcal{E}_{\alpha_{j-1},\alpha_j}(f)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k}\frac{K_n}{(n+1)!}\max_{x\in[\alpha_{j-1},\alpha_j]}|f^{(n+1)}(x)|h_j^{n+2} \\
&\leqslant K_n\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[\alpha,\beta]}|f^{(n+1)}(x)|\sum_{j=1}^{k}h_j \\
&\leqslant K_n(\beta-\alpha)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty
\end{aligned}$$

Mais majoration non optimale!

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}^{\text{comp}}_{\alpha,\beta}(f)| \leqslant K_n(\beta-\alpha)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$$

A l'aide des **noyaux de Peano** :

Théorème 2: [?], page 43 (admis)

Soient $\mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ de degré d'exactitude $p \geqslant n$ et $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. On a alors

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta)| \leqslant C_p(\beta-\alpha)h^{p+1}\left\|f^{(p+1)}\right\|_\infty \tag{18}$$

avec $h = \max_{j\in[\![1,k]\!]}(\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$. Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta)| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{19}$$

et son **ordre de convergence** est $p+1$.

Préssentir l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

- Pour Simpson: $E(h) = \mathcal{O}(h^4) = Ch^4$
- Pour Trapèze: $E(h) = \mathcal{O}(h^2) = Ch^2$

$$E(h) = Ch^p, \implies E(h/10) = C\big(h/10\big)^p = \frac{E(h)}{10^p}$$

Listing 1: : Script Matlab/Octave pour illustrer l'ordre des méthodes des Trapèzes et de Simpson

```
f=@(x) cos(x);
F=@(x) sin(x);
a=0;b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a);
I1=QuadTrapeze(f,a,b,10);
I2=QuadTrapeze(f,a,b,100);
fprintf('Erreurs Trapeze: (N=10) %.5e - (N=100) %.5e\n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))
I1=QuadSimpson(f,a,b,10);
I2=QuadSimpson(f,a,b,100);
fprintf('Erreurs Simpson: (N=10) %.5e - (N=100) %.5e\n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))
```

Output

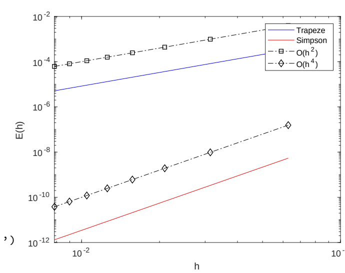
```
Erreurs Trapeze: (N=10) 2.05701e-03 - (N=100) 2.05618e-05
Erreurs Simpson: (N=10) 2.11547e-07 - (N=100) 2.11391e-11
```


Représenter graphiquement l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

$$E(h) = Ch^p, \implies \log(E(h)) = \log(C) + p\log(h)$$

En échelle logarithmique, $h \mapsto E(h)$ est une droite de pente p

```
f=@(x) cos(x);
F=@(x) sin(x);
a=0;b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a);
LN=25:25:200;
k=1;
for N=LN
  H(k)=(b-a)/N;
  E1(k)=abs(QuadTrapeze(f,a,b,N)-Iex);
  E2(k)=abs(QuadSimpson(f,a,b,N)-Iex);
  k=k+1;
end
loglog(H,E1,'b',H,E2,'r',H,H.^2,'k-.s', ...
   H,0.01*H.^4,'k-.d')
xlabel('h');ylabel('E(h)')
legend('Trapeze','Simpson','O(h^2)','O(h^4)')
```



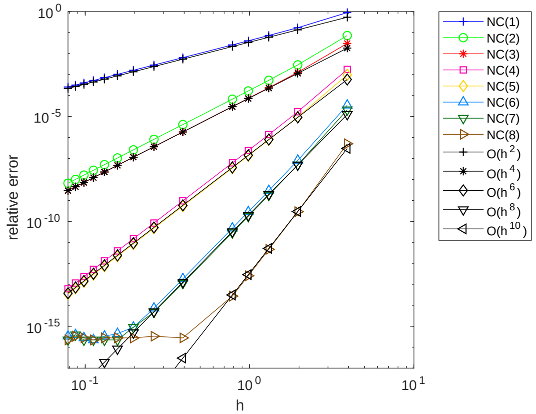


Figure: Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de $\int_0^{5\pi/2} cos(x)dx$, `NC(n)` correspondant à $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ et $h = \frac{5\pi}{2k}$.

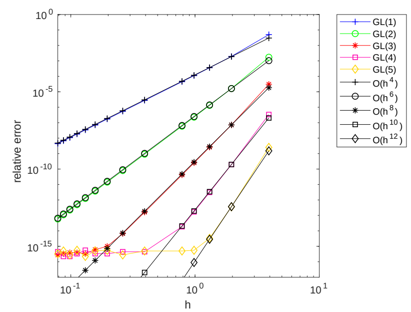


Figure: Erreur des méthodes de Gauss-Legendre composées pour le calcul de $\int_0^{5\pi/2} cos(x)dx$, `GL(n)` correspondant à $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ et $h = \frac{5\pi}{2k}$.