B.2 Algèbre linéaire

Toute cette partie peut être joyeusement omise par tout Homo sapiens *algebra linearis* compatible. Toutefois une lecture rapide permet de se raffraichir la mémoire.

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n, sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

B.2.1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $= \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par $\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$ et $\boldsymbol{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^* = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α.

Definition B.14

- Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.
- Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.

Definition B.15

L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ définie par

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^{\mathsf{t}}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^*.\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u}} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i, \quad \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{B.5}$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien[a] si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_n .$$

[a] La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de B.5 :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Definition B.16

Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- Deux **vecteurs** $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont **orthogonaux** si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.
- Un **vecteur** $\boldsymbol{v}$ est **orthogonal à une partie** U de V si

  $$\forall \boldsymbol{u} \in U, \ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0.$$

  On note $\boldsymbol{v} \perp U$.
- Un ensemble de vecteurs $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si

  $$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2$$

  où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Definition B.17

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est représenté par $\boldsymbol{0}_n$ ou $\boldsymbol{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Definition B.18

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur $\boldsymbol{u}$ par

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* \boldsymbol{v}, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n. \tag{B.6}$$

La matrice $\mathbb{P}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*$ s'appelle la matrice de la projection orthogonale suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Proposition B.19: Procédé de Gram-Schmidt

Soit $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de $\mathbb{K}^n$. On construit successivement les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k \rangle} \boldsymbol{u}_k, \ \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Ils forment une **base orthogonale** de $\mathbb{K}^n$ et $\operatorname{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_i) = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$ (voir Exercice B.3.5, page 197).
Pour construire une **base orthonormale** $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale:

$$\boldsymbol{z}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i \rangle^{1/2}}, \quad \forall i \in [\![1,n]\!].$$

B.2.2 Matrices

Généralités

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée *matrice de type* (m,n), et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type (m,n) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $\mathrm{A}_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi le noter $\mathrm{A}_{i,j}$.

Definition B.20

La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbb{O}_{m,n}$ ou $\mathbb{O}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. Si $m=n$ on peut aussi noter $\mathbb{O}_n$ cette matrice.

Definition B.21

- Soit une matrice $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^*\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_m=\langle \boldsymbol{u},\mathbb{A}^*\boldsymbol{v}\rangle_n,\ \forall \boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^n,\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^m$$
qui entraine $(\mathbb{A}^*)_{ij}=\overline{\mathrm{A}_{ji}}$.
- Soit une matrice $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^{\mathsf{t}}\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_m=\langle \boldsymbol{u},\mathbb{A}^{\mathsf{t}}\boldsymbol{v}\rangle_n,\ \forall \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n,\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m$$
qui entraine $(\mathbb{A}^{\mathsf{t}})_{ij}=\mathrm{A}_{ji}$.

Definition B.22

Si $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B}\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, leur **produit** $\mathbb{A}\mathbb{B}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par
$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij}=\sum_{k=1}^{p}\mathrm{A}_{ik}\mathrm{B}_{kj},\forall i\in[\![1,m]\!],\ \forall j\in[\![1,n]\!]. \tag{B.7}$$

Exercice B.2.1: résultats à savoir

Soient $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B}\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que
$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\mathsf{t}}=\mathbb{B}^{\mathsf{t}}\mathbb{A}^{\mathsf{t}},\quad \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R}, \tag{B.8}$$
$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{*}=\mathbb{B}^{*}\mathbb{A}^{*},\quad \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C} \tag{B.9}$$

Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.

Definition B.23

Si $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n$ alors les éléments $\mathrm{A}_{ii}=(\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $\mathrm{A}_{ii}=(\mathbb{A})_{ij}, i\neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.

Definition B.24

On appelle **matrice identitée** de $\mathcal{M}_n$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égals à 1 et les éléments hors-diagonaux nulles. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a
$$(\mathbb{I})_{i,j}=\delta_{ij},\ \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2.$$

Definition B.25

Une matrice $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** ou **régulière** s'il existe une matrice $\mathbb{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$\mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathbb{A}=\mathbb{I} \tag{B.10}$$
Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est **singulière** ou **non inversible**.

On peut noter que la matrice $\mathbb{B}$ est unique. En effet, soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ vérifiant (B.10). On a alors $\mathbb{A}\mathbb{B}_2=\mathbb{I}$ et donc $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2)=\mathbb{B}_1$. On a aussi $\mathbb{B}_1\mathbb{A}=\mathbb{I}$ et donc $(\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2=\mathbb{B}_2$. Le produit des matrices étant associatif on a $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2)=(\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2$ et donc $\mathbb{B}_1=\mathbb{B}_2$.

Definition B.26

Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n$ une matrice inversible. On note $\mathbb{A}^{-1}\in\mathcal{M}_n$ l'unique matrice vérifiant
$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}=\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}=\mathbb{I}. \tag{B.11}$$
Cette matrice est appelée **matrice inverse** de $\mathbb{A}$.

Definition B.27

Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

- On note $\ker(\mathbb{A})=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\ ;\ \mathbb{A}\boldsymbol{v}=0\}$ le **noyau** de $\mathbb{A}$.
- On note $\operatorname{im}(\mathbb{A})=\{\mathbb{A}\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^m\ ;\ \boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\}$ l'**image** de $\mathbb{A}$.
- On note $\operatorname{rang}(\mathbb{A})\stackrel{\text{def}}{=}\dim(\operatorname{im}(\mathbb{A}))$ le **rang** de $\mathbb{A}$.

Théorème B.28: (théorème du rang)

Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a
$$\operatorname{rang}(\mathbb{A})+\dim(\ker(\mathbb{A}))=n$$

Proposition B.29

Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\mathbb{A}$ est inversible,
2. $\operatorname{rang}(\mathbb{A})=n$,
3. $\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n,\ \mathbb{A}\boldsymbol{x}=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}=0$,
4. $\det(\mathbb{A})\neq 0$,
5. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles,
6. il existe $\mathbb{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{I}$,
7. il existe $\mathbb{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{B}\mathbb{A}=\mathbb{I}$.

Exercice B.2.2: *résultats à savoir*

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que $\mathbb{A}\mathbb{B}$ inversible et

$$\left(\mathbb{A}^{\mathsf{t}}\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{\mathsf{t}}, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{B.12}$$
$$\left(\mathbb{A}^{*}\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{*}, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{B.13}$$
$$\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right)^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \tag{B.14}$$
$$\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A} \tag{B.15}$$

Definition B.30

Une matrice **carrée** $\mathbb{A}$ est :

- **symétrique** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\mathsf{t}}$,
- **hermitienne** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{*}$,
- **normale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^{*} = \mathbb{A}^{*}\mathbb{A}$,
- **orthogonale** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{t}} = \mathbb{A}^{\mathsf{t}}\mathbb{A} = \mathbb{I}$,
- **unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^{*} = \mathbb{A}^{*}\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

Proposition B.31

- une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse $\mathbb{A}^{\mathsf{t}}$ (resp. $\mathbb{A}^{*}$).

Definition B.32

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

- Elle est **définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle > 0, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{B.16}$$
- Elle est **semi définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \geqslant 0, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{B.17}$$

Exercice B.2.3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Que peut-on dire de la matrice $\mathbb{A}\mathbb{A}^{*}$? Et si la matrice $\mathbb{A}$ est inversible?*

Q. 2 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermiienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.*

Q. 3 *Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure aléatoire.*

Definition B.33

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definition B.34

Soit $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la **matrice de permutation** de $\mathbb{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n$ est définie par

$$(\mathbb{P}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

Exercice B.2.4: *résultats à savoir*

Montrer qu'une matrice de permutation est orthogonale.

Definition B.35

Soient $\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ et $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.. Le **déterminant** d'une matrice $\mathbb{A}$ est défini par

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{\sigma(j)j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ.

Proposition B.36: Méthode de Laplace ou des coffacteurs

Soit $\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$. On note $\mathbb{A}^{[i,j]} \in \mathcal{M}_{n-1}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\mathbb{A}$. On a alors le **développement par rapport à la ligne** $i \in [\![1, n]\!]$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathrm{A}_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right), \tag{B.18}$$

et le **développement par rapport à la colonne** $j \in [\![1, n]\!]$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathrm{A}_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right). \tag{B.19}$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right)$ est appellé le **cofacteur** du terme $\mathrm{A}_{i,j}$.

Definition B.37

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de $\mathbb{A}$ s'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}. \tag{B.20}$$

Le vecteur $\boldsymbol{u}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
Le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est appelé **élément propre** de $\mathbb{A}$.

1

Definition B.38

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$. Le sous-espace

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\} = \ker(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{B.21}$$

est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ. La dimension de E_λ est appelée **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ.

Definition B.39

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré n défini par

$$\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{B.22}$$

est appellé **polynôme caractéristique** de la matrice $\mathbb{A}$.

Proposition B.40

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Les racines complexes du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$.
- Si la racine λ de $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ est de multiplicité k, on dit que la valeur propre λ est de **multiplicité algébrique** k.
- La matrice $\mathbb{A}$ possède n valeurs propres distinctes ou non.

Definition B.41

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in [\![1, n]\!]$, les n valeurs propres de $\mathbb{A}$. Le **spectre** de la matrice $\mathbb{A}$ est le sous-ensemble

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \tag{B.23}$$

du plan complexe.

Proposition B.42

2

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n$. On a les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbb{A}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), && \text{(B.24)}\\
\det(\mathbb{A}) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), && \text{(B.25)}\\
\mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \mathrm{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), && \text{(B.26)}\\
\mathrm{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) &= \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B, && \text{(B.27)}\\
\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), && \text{(B.28)}\\
\det(\mathbb{A}^*) &= \overline{\det(\mathbb{A})}. && \text{(B.29)}
\end{aligned}$$

1

Definition B.43

Le **rayon spectral** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est le nombre $\geqslant 0$ défini par

$$\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda_i(\mathbb{A})|\,;\, i \in [\![1, n]\!]\}$$

Matrices particulières 2

Definition B.44

Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est :

- **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ \forall i \in [\![1, n]\!], \tag{B.30}$$

- **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{B.31}$$

Proposition B.45

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).
De plus on a

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Preuve. (voir Exercice B.3.2, page 196) □ 3

Proposition B.46

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

1. $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$).
2. Si $\mathbb{A}$ est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(\mathbb{A}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(\mathbb{A})_{i,i}}$$

1 *Preuve.* (voir Exercice B.3.10, page 202) □

Definition B.47

On appelle **matrice bande** une matrice $\mathbb{A}$ telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j-i| \leqslant c$. c est la **demi largeur de bande**.

Lorsque $c = 1$, la matrice est dite **tridiagonale** . Lorsque $c = 2$, la matrice est dite **pentadiagonale** .

Definition B.48

On appelle **sous-matrice** d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n-k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée $\mathbb{A}$ d'ordre n, on obtient la **sous matrice principale** d'ordre k.

Definition B.49

On appelle **matrice bloc** une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right)$$

où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall j \in [\![1,q]\!]$, $\mathbb{A}_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i,m_j}$. On a $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ et $M = \sum_{j=1}^{q} m_j$.

On dit que $\mathbb{A}$ et une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

Propriété B.50: Multiplication de matrices blocs

2

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de $\mathbb{A}$ soit égale au nombre de blocs ligne de $\mathbb{B}$ avec correspondance des dimensions.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,r} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{A}_{q,r} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i,m_k}$ et $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k,s_j}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $k \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,r]\!]$. La matrice produit $\mathbb{P}$ s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \end{array}\right)$$

avec $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall j \in [\![1,r]\!]$ $\mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,s_j}$ et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \mathbb{A}_{i,k}\mathbb{B}_{k,j}.$$

1

Definition B.51

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). . Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad (\text{resp. } \mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)).$$

Definition B.52

On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)$$

Proposition B.53

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré décomposée en $n \times n$ blocs. Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_{i,i} \tag{B.32}$$

Proposition B.54

Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \cdots & \circ & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

B.2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

Definition B.55

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \iff \boldsymbol{v} = 0$,
- $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V$,
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle** . On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max_i |v_i| \, .$$

Théorème B.56

Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme.

Proposition B.57

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\boldsymbol{u}\|_p \, \|\boldsymbol{v}\|_q \, . \tag{B.33}$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

Definition B.58

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V, sont **équivalentes** s'il exite deux constantes C et C' telles que

$$\|\boldsymbol{v}\|' \leqslant C \, \|\boldsymbol{v}\| \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{v}\| \leqslant C' \, \|\boldsymbol{v}\|' \quad \text{pour tout } \boldsymbol{v} \in V. \tag{B.34}$$

Proposition B.59

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Definition B.60

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Proposition B.61

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|, \tag{B.35}$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
De plus

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\| \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \tag{B.36}$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}. \tag{B.37}$$

Il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\boldsymbol{u} \neq 0 \ \text{ et } \ \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|. \tag{B.38}$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \tag{B.39}$$

Théorème B.62

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{B.40}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}\mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \tag{B.41}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty} = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{B.42}$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2. \tag{B.43}$$

Par ailleurs, si la matrice $\mathbb{A}$ est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \tag{B.44}$$

Proposition B.63

1. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.
2. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème B.64

1. Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors
$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|. \tag{B.45}$$
2. Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que
$$\|\mathbb{A}\| \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \tag{B.46}$$

Théorème B.65

L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j)=\in[\![1,n]\!]^2} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}, \tag{B.47}$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n, est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geqslant 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leqslant \|\mathbb{A}\|_E \leqslant \sqrt{n}\,\|\mathbb{A}\|_2, \ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \tag{B.48}$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème B.66

1. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et $\mathbb{B}$ une matrice vérifiant
$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$
Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et
$$\left\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$
2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement
$$\|\mathbb{B}\| \geqslant 1$$
pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

B.2.4 Réduction des matrices

Definition B.67

Soit $A : V \to V$ une application linéaire, représenté par une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$. Relativement à une autre base $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, la même application est représentée par la matrice

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} \tag{B.49}$$

où $\mathbb{P}$ est la matrice inversible dont le j-ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur $\boldsymbol{f}_j$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_1\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_{n-1}\rangle & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_n\rangle \end{pmatrix} \tag{B.50}$$

La matrice $\mathbb{P}$ est appelée **matrice de passage de la base** $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ **dans le base** $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Definition B.68

On dit que la matrice carrée $\mathbb{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $\mathbb{P}$ telle que la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ soit diagonale.

Remarque B.69 On notera que, dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matrice $\mathbb{A}$, et que le j-ème vecteur colonne $\boldsymbol{p}_j$ de la matrice $\mathbb{P}$ est formé des composantes, dans la même base que $\mathbb{A}$, d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j. On a

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \iff \mathbb{A}\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j, \ \forall j \in [\![1,n]\!]. \tag{B.51}$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Théorème B.70

1. Etant donnée une matrice **carrée** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **triangulaire**.
2. Etant donnée une matrice **normale** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **diagonale**.
3. Etant donnée une matrice **symétrique** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{O}$ telle que la matrice $\mathbb{O}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{O}$ soit **diagonale**.

B.2.5 Suites de vecteurs et de matrices

Definition B.71

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de V **converge vers un élément** $\boldsymbol{v} \in V$, si

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

Théorème B.72

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k\boldsymbol{v} = 0$ pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Théorème B.73

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{B}^k\right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

B.3 Receuil d'exercices

B.3.1 Algèbre linéaire

Sur les matrices

Exercice B.3.1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telles que

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}\boldsymbol{v}\rangle_n, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Exprimer les éléments de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de ceux de la matrice $\mathbb{A}$.

Exercice B.3.2