Chapitre 5

Integration

Definition 5.1

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \tag{5.1}$$

avec $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a,b]$ distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \tag{5.2}$$

Definition 5.2

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p.

5.1 Méthodes de quadrature élémentaires

5.1.2 Quelques résultats théoriques

Proposition 5.3

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux dans $[a,b]$).
On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)) = \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i). \tag{5.3}$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.

Proposition 5.4

La formule de quadrature élémentaire (5.1) à $n+1$ points est de degré d'exactitude k (au moins) si

et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{5.4}$$

Corollaire 5.5

La formule de quadrature élémentaire (5.1) à $n+1$ points est de degré d'exactitude 0 au moins si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n} w_i = 1.$$

Proposition 5.6

Soient $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a,b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (5.1) à $n+1$ points de degré d'exactitude n au moins.

Exercice 5.1.1

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. Ecrire une fonction algorithmique WeightsFromPoints permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.6. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\boldsymbol{x} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A},\boldsymbol{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Proposition 5.7

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points (distincts deux à deux et ordonnés). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5.5}$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

Proposition 5.8

Soit $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ definie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (distincts deux à deux).
La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dx, \quad \forall i \in [\![0,n]\!] \tag{5.6}$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b-a)$.
Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx \tag{5.7}$$

Exercice 5.1.2

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in [\![0, n]\!]$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i, j) \in [\![0, n]\!]^2$

Q. 1 *Soit* $i \in [\![0, n]\!]$. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{L}_i((a+b) - x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

Q. 2 *Soient* $(w_i)_{i=0}^n$ *définis par*

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

Lemme 5.9

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$$

On a alors

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins n si n est impaire et au moins $n+1$ sinon.

Proposition 5.10: Degré maximal d'exactitude

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ défini par (5.1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n. Elle est alors de degré d'exactitude $n+m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{5.8}$$

où π_n est le polynôme de degré $n+1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{5.9}$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points est $2n+1$.

De plus, on a

$$(5.8) \Longleftrightarrow \int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]. \tag{5.10}$$

5.1.3 Formules élémentaires de Newton-Cotes

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad x_i = a + ih \text{ avec } h = (b-a)/n.$$

On a alors

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Proposition 5.11

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$.

Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

où les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont donnés par (5.6).

Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal à n si n est impair et à $n+1$ sinon.

n	**d.e.**	w_i (poids)									**nom**
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$							Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$					Villarceau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$				?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$			Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$		?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$	?

Table 5.1: Méthodes de Newton-Cotes

Exercice 5.1.3

Q. 1 *Ecrire une fonction algorithmique* WeightsPointsNC *retournant les* $(n+1)$ *points et les* $(n+1)$ *poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* QuadElemNC *retournant la valeur de* $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ *correpondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

5.1.4 Formules élémentaires de Gauss-Legendre

Exercice 5.1.4

Q. 1 *Déterminer les points* t_0, t_1 *de l'intervalle* $[-1, 1]$ *et les poids* w_0, w_1 *tel que la formule de* *quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2 *En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ qui soit de degré d'exactitude* 3.

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t),\ \forall n \geqslant 1 \tag{5.11}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes:

1. le polynôme de Legendre P_n est de degré n,
2. la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,
3. pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{5.12}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dx.$$

4. Pour $n \geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t - t_i),\ C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]a, t0[$, $]t_0, t_1[$, $\ldots$, $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, b[$.

Proposition 5.12

Soit $(t_i)_{i=0}^n$ les $n+1$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$ et w_i les poids donnés par (5.6). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

n	**exactitude**	w_i (poids)	t_i (points)
0	1	1	0
1	3	$1/2, 1/2$	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	$5/18, 8/18, 5/18$	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table 5.2: Méthodes de Gauss-Legendre sur $[-1,1]$

Théorème 5.13

Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 5.12. Alors on a

$$|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!}\int_a^b \pi_n(x)^2 dx \tag{5.13}$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

Exercice 5.1.5

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1,1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1}(t)$. Cette formule à pour degré d'exactitude $2n+1$.

Soient $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|\mathrm{P}\| = \langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle^{1/2}$ la norme associée. Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1 *Montrer que*

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{1}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \text{ et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

On définit le vecteur $\boldsymbol{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t), \ldots, \mathrm{M}_n(t))^t.$$

Q. 2 *Montrer que l'on a*

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{2}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1, \ldots, c_n$. Le vecteur $\boldsymbol{e}_{n+1}$ étant le $(n+1)$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 3 *En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.*

Q. 4 *Montrer que*

$$\sum_{k=0} w_k \mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k) = \delta_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \tag{3}$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0, \ldots, w_n)$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = \mathrm{M}_j(t_i)$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

Q. 5
1. *Montrer que $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.*
2. *En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.*
3. *En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^n (\mathrm{M}_k(t_i))^2$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.*

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** EIG($\mathbb{A}$) retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 6
1. *Ecrire la fonction $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow$ GaussLegendre(n) retournant le tableau des points $\boldsymbol{t}$ et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.*

2. *Ecrire la fonction* $I \leftarrow$ QuadElemGaussLegendre(f,a,b,n) *retournant une approximation de* $\int_a^b f(x)dx$ *en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à* $(n+1)$ *points sur l'intervalle* $[a,b]$.

5.2 Méthodes de quadrature composées

Definition 5.9

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ une subdivison de l'intervalle $[\alpha,\beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)dx. \tag{5.14}$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g,a,b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points d'ordre p donnée par

$$\mathcal{Q}_n(g,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x)dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée à** $\mathcal{Q}_n$, notée $\mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_n(f,\alpha_{i-1},\alpha_i) \approx \int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{5.15}$$

Exercice 5.2.1

Ecrire une fonction algorithmique QuadSimpson retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f. On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

Proposition 5.10

Soit $\mathcal{Q}_n$ une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points. Si $\mathcal{Q}_n$ est d'ordre p alors la méthode de quadrature composée associée est aussi d'ordre p : elle est exacte pour tout polynôme de degré p.

Théorème 5.11: [1], page 43 (admis)

Soient $\mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ de degré d'exactitude $p \geqslant n$ et $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. On a alors

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta)| \leqslant C_p(\beta-\alpha)h^{p+1}\left\|f^{(p+1)}\right\|_\infty \tag{5.16}$$

avec $h = \max_{j\in[\![1,k]\!]}(\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$. Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \mathcal{Q}^{\text{comp}}_{k,n}(f,\alpha,\beta)| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{5.17}$$

et son **ordre de convergence** est $p+1$.

5.3 Dominance (rappels?)

Definition 5.12

Soient X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et f et g deux fonctions définies sur X à valeurs réelles. On dit que f est *dominée par* g *au voisinage de* $a \in \overline{X}$ s'il existe un voisinage U de a et un réel $C \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$\forall x \in U \cap X, \quad |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$, ou $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ (notation de Bachmann), ou, lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté sur la valeur de a, $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.

Proposition 5.13

Soient X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur X à valeurs réelles, et $a \in \overline{X}$.

- Si a est fini, $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si et seulement si

$$\exists \eta > 0,\ \exists C > 0,\ \text{tel que } \forall x \in X,\ |x-a| < \eta \implies |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

- Si $a = +\infty$, $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si et seulement si

$$\exists M > 0,\ \exists C > 0,\ \text{tel que } \forall x \in X,\ x > M \implies |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

Bibliography

[1] M. Crouzeix and A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1992.