3.2 Normes vectorielles et normes matricielles

3.2.1 Normes vectorielles

Definition 3.23

Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = 0$,
- $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V$,
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle** . On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Proposition 3.24

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$. Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 3.2.1

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Trouver* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $\langle \alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$.

Q. 2 *En calculant* $\|\alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$, *montrer que*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{3.1}$$

Q. 3 *Soit* $\boldsymbol{x} \neq 0$. *Montrer alors que l'inégalité (3.1) est une égalité si et seulement si* $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$.

Lemme 3.25: Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{3.2}$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont colinéaires.

Exercice 3.2.2

Q. 1 *Soit la fonction* $f(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda$ *avec* $0 < \lambda < 1$. *Montrer que pour tous* $\alpha \geqslant 0$ *et* $\beta \geqslant 0$ *on a*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda \alpha + (1-\lambda)\beta . \tag{3.3}$$

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 *On pose* $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$ *et* $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$. *En utilisant l'inégalité (3.3), montrer que l'on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \tag{3.4}$$

Q. 3 *En déduire l'inégalité de Holder suivante*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q . \tag{3.5}$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?

Lemme 3.26: Inégalité de Hölder

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q . \tag{3.6}$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

Definition 3.27

Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V, sont **équivalentes** s'il exite deux constantes C et C' telles que

$$\|\boldsymbol{x}\|' \leqslant C \|\boldsymbol{x}\| \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{x}\| \leqslant C' \|\boldsymbol{x}\|' \quad \text{pour tout } \boldsymbol{x} \in V. \tag{3.7}$$

Proposition 3.28

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

3.2.2 Normes matricielles

Definition 3.29

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha \mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Proposition 3.30

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{3.8}$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).
Elle vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|= 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \inf\left\{\alpha\in\mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha\|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\right\}. \tag{3.9}$$

De plus, pour tout $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\| \tag{3.10}$$

et il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u}\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|. \tag{3.11}$$

Soit $\mathbb{I}$ la matrice identité d'ordre n, on a

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1. \tag{3.12}$$

Théorème 3.31

Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \tag{3.13}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^*\right)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \tag{3.14}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty} = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{3.15}$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2. \tag{3.16}$$

Corollaire 3.32

1. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne,on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.
2. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème 3.33

1. Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors
$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|. \tag{3.17}$$

2. Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que
$$\|\mathbb{A}\| \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \tag{3.18}$$

Théorème 3.34: Norme de Frobenious

L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j)=\in[\![1,n]\!]^2} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)}, \tag{3.19}$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n, est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geqslant 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leqslant \|\mathbb{A}\|_E \leqslant \sqrt{n}\,\|\mathbb{A}\|_2,\ \forall \mathbb{A}\in\mathcal{M}_n. \tag{3.20}$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème 3.35

1. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et $\mathbb{B}$ une matrice vérifiant
$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$
Alors la matrice $(\mathbb{I}+\mathbb{B})$ est inversible, et
$$\left\|(\mathbb{I}+\mathbb{B})^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\|\mathbb{B}\|}.$$
2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I}+\mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement
$$\|\mathbb{B}\| \geqslant 1$$
pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

3.2.3 Suites de vecteurs et de matrices

Definition 3.36

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de V **converge vers un élément** $\boldsymbol{v}\in V$, si

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

Théorème 3.37: admis

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k\boldsymbol{v} = 0$ pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$,

3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Théorème 3.38: admis

Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{B}^k\right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$