Chapitre 2

Résolution de systèmes non linéaires

2.1 Recherche des zéros d'une fonction

principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un unique zéro de la fonction f, on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itére ce processus sur le nouvel intervalle.

On défini les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$
et
$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Exercice 2.1.1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a,b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Q. 1 1. *Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α.*

2. *En déduire que la suite (x_k) converge vers α.*

Q. 2 1. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.*

2. *Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.*

Proposition 2.1: Méthode de dichotomie/bissection

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a,b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et
$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0$, $\forall k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$
$$|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon.$$

2.2 Points fixes d'une fonction (dimension 1)

Definition 2.2

On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue par une méthode numérique, **converge vers** α **avec un ordre** $p \geqslant 1$ si
$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \ \text{ tels que } \ |x_{k+1} - \alpha| \leqslant C|x_k - \alpha|^p,\ \forall k \geqslant k_0. \tag{2.1}$$
où $C < 1$ si $p = 1$.

Théorème 2.3: Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$

Soient $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et Φ une application continue de $[a,b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a,b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ.
De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0,1[$), c'est à dire
$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x - y|\ \forall (x,y) \in [a,b]^2, \tag{2.2}$$
alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a,b]$.
Pour tout $x_0 \in [a,b]$, la suite
$$x_{k+1} = \Phi(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$
est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.
On a les deux estimations suivantes :
$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k|x_0 - \alpha|,\ \forall k \geqslant 0, \tag{2.4}$$
$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|,\ \forall k \geqslant 0, \tag{2.5}$$

Théorème 2.4: Convergence globale de la méthode du point fixe

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vérifiant $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$ et
$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in [a,b],\ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{2.6}$$
Soit $x_0 \in [a,b]$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$,
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in [a,b]$,
3. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
4. Si $x_0 \neq \alpha$, alors
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{2.7}$$

Théorème 2.5: Convergence locale de la méthode du point fixe

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α.

Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leqslant \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{2.8}$$

Exercice 2.2.1

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α et vérifiant $\Phi'(\alpha) = 0$.

Q. 1 *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers α.*

On suppose de plus que Φ' est dérivable sur $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] |\Phi''(x)| \leqslant M$$

Q. 2 1. *Montrer que*

$$\forall x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta],\ |x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|x_0-\alpha|\right)^{2^k}$$

2. *Quel est l'ordre de convergence dans ce cas.*

Q. 3 *A quelle condition a-t'on*

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{M}10^{-2^k}.$$

Proposition 2.6

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α point fixe de Φ. Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $p+1$ et

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{2.9}$$

Proposition 2.7: convergence, méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [a,b]$ et pour tout $k \geqslant 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \tag{2.10}$$

On suppose de plus que $\forall x \in [a,b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{2.11}$$
$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{2.12}$$

alors la suite (x_k) converge vers l'unique racine $\alpha \in [a,b]$ de f.

Exercice 2.2.2

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a,b]$

donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 *Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{2.13}$$

alors $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$.

Q. 2 *Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{2.14}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

Q. 3 *En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a,b]$ de $f(x) = 0$.*

Proposition: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Si la suite (x_k) définie par la méthode de la corde en (2.10) converge vers $\alpha \in]a,b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.
De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Proposition 2.8: convergence de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

est localement convergente d'ordre 2.

Exercice 2.2.3

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e-7$.

Q. 1 *Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.*

Q. 2 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel* *positif.*

Q. 3 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Proposition 2.9: Convergence méthode de la sécante (Admis)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

2.3 Résolution de systèmes non linéaires

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_N \end{array} \right.$$

Théorème 2.10

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in]0,1[, \quad \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U \times U. \tag{2.17}$$

Alors

1. $\boldsymbol{\Phi}$ admet un unique point fixe $\boldsymbol{\alpha} \in U$ (i.e. unique solution de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$).
2. La suite des itérés $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ pour toute valeur initiale $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\left\| \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant \frac{L^{k-l}}{1-L} \left\| \boldsymbol{x}^{[l+1]} - \boldsymbol{x}^{[l]} \right\|, \quad 0 \leqslant l \leqslant k \tag{2.18}$$

On défini la **matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$**, notée $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.11

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie

par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left(\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right) \right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.