

Proposition

Soit $(t_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et w_i les poids donnés par (5.7). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

n	exactitude	w_i (poids)	t_i (points)
0	1	1	0
1	3	1/2, 1/2	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	5/18, 8/18, 5/18	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table 1: Méthodes de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$

Proof. D'après la Proposition 5.3, il suffit de démontrer ce résultat sur l'intervalle $[-1, 1]$ à l'aide du changement de variable affine $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$.

Montrons donc que la formule de quadrature élémentaire

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

est de degré d'exactitude $2n + 1$.

Comme les poids w_i sont donnés par (5.7), cette formule est de degré d'exactitude au moins n . Pour établir qu'elle est de degré d'exactitude $2n + 1$, il faut, d'après la Proposition 5.11 avec $m = n + 1$, que

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

avec $\pi_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - t_i)$. D'après les propriétés des polynômes de Legendre P_n , on a $P_{n+1}(t) = C\pi_n(t)$ avec $C \in \mathbb{R}^*$. On doit donc avoir de manière équivalente

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or, la famille des polynômes de Legendre $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, la relation précédente est vérifiée.

Pour démontrer l'unicité de la formule, il suffit d'établir l'unicité des points de quadrature, les poids étant calculés à partir de ces points. L'unicité du $(n+1)$ -uplet (x_0, \dots, x_n) revient à établir l'unicité du $(n+1)$ -uplet (t_0, \dots, t_n) . Supposons qu'il existe (t_0, \dots, t_n) et $(\tilde{t}_0, \dots, \tilde{t}_n)$. Notons $\pi_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - t_i)$ et $\tilde{\pi}_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - \tilde{t}_i)$. On a donc

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t)Q(t)dt = \int_{-1}^1 \tilde{\pi}_n(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le polynôme $R = \pi_n - \tilde{\pi}_n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ car les polynômes π_n et $\tilde{\pi}_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont unitaires. On a alors

$$\int_{-1}^1 R(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

En choisissant $Q = R$, on obtient

$$\int_{-1}^1 R^2(t)dt = 0$$

ce qui entraîne $R = 0$. □

