

Proposition

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (5.1), une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points.

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire continue.

Proof. On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b).\end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leq C \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| &= |(b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)| \\ &\leq (b - a) \sum_{j=0}^n |w_j| |f(x_j)| \\ &\leq C \|f\|_{\infty}, \quad \text{avec } C = (b - a) \sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } f. \end{aligned}$$

□

