

EXERCICE 1

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n + 1$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.

On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et π_n le polynôme de degré $n + 1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (\text{P-1})$$

Q. 1 Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle fermé contenant x, x_0, \dots, x_n tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (\text{P-2})$$

Indication : Etudier les zéros de la fonction $F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t)$. □

R. 1 S'il existe $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x = x_i$ alors l'équation (P-2) est immédiatement vérifiée.

Soit $x \in [a, b]$ distinct de tous les x_i . Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$, $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que la fonction F est dans $\mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. La fonction F admet aussi $n + 2$ zéros : x, x_0, \dots, x_n . On note $\xi_{x,1}^{[0]}, \dots, \xi_{x,n+2}^{[0]}$ ces $n + 2$ zéros ordonnés $\xi_{x,1}^{[0]} < \dots < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. La fonction F étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de F , il existe au moins un zéro de $F' = F^{(1)}$. Plus précisément on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \quad \exists \xi_{x,i}^{[1]} \in]\xi_{x,i}^{[0]}, \xi_{x,i+1}^{[0]}[\quad \text{tels que} \quad F^{(1)}(\xi_{x,i}^{[1]}) = 0$$

et on en déduit que la fonction $F^{(1)}$ admet $n + 1$ zéros $\xi_{x,1}^{[1]}, \dots, \xi_{x,n+1}^{[1]}$ et l'on a $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[1]} < \dots < \xi_{x,n+1}^{[1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$. Il faut noter la dépendance en x des zéros de F' d'où la notation un peu "lourde".

Montrons par récurrence finie que (\mathcal{P}_k) est vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

$$(\mathcal{P}_k) : \exists \xi_{x,i}^{[k]}, \quad i \in \llbracket 1, n + 2 - k \rrbracket, \quad \xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \dots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]} \quad \text{tels que} \quad F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

Initialisation : Pour $k = 1$, la preuve a déjà été faite.

Hérédité : Soit $1 < k - 1 < n + 1$, on suppose (\mathcal{P}_{k-1}) vérifiée. La fonction $F^{(k-1)}$ étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, le théorème de Rolle dit qu'entre deux zéros consécutifs de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Par hypothèse $F^{(k-1)}$ admet $n + 2 - (k - 1)$ zéros vérifiant

$$\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k-1]} < \dots < \xi_{x,n+2-(k-1)}^{[k-1]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$$

La fonction $F^{(k-1)}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ puisque $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$. Par application du théorème de Rolle, entre deux zéros de $F^{(k-1)}$, il existe au moins un zéro de $F^{(k)}$. Plus précisément pour tout $i \in \llbracket 1, n + 2 - k \rrbracket$ on a

$$\exists \xi_{x,i}^{[k]} \in]\xi_{x,i}^{[k-1]}, \xi_{x,i+1}^{[k-1]}[, \quad F^{(k)}(\xi_{x,i}^{[k]}) = 0$$

De plus, par construction, $\xi_{x,1}^{[0]} < \xi_{x,1}^{[k]} < \dots < \xi_{x,n+2-k}^{[k]} < \xi_{x,n+2}^{[0]}$ et donc (\mathcal{P}_k) est vraie.

Avec $k = n + 1$ on obtient

$$(\mathcal{P}_{n+1}) : \exists \xi_{x,1}^{[n+1]} \in]\xi_{x,1}^{[0]}, \xi_{x,n+2}^{[0]}[\text{ tel que } F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = 0$$

et donc

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - P_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]})$$

Comme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P_n^{(n+1)} = 0$. De plus $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et comme $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e. son monôme de puissance $n + 1$ à pour coefficient 1) on obtient $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$ On a alors

$$f^{(n+1)}(\xi_{x,1}^{[n+1]}) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} (n + 1)!$$

