

EXERCICE

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$.

Q. 1 Soit $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un élément propre de \mathbb{B} .

- a. Montrer que la matrice \mathbb{B} est hermitienne.
- b. Montrer que les valeurs propres de \mathbb{B} sont réelles.
- c. En déduire que

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}.$$

□

La matrice \mathbb{B} étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice \mathbb{U} unitaire et une matrice \mathbb{D} diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U} \mathbb{D} \mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les éléments propres de \mathbb{D} . Les vecteurs \mathbf{e}_i sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^n et $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$.

Q. 2 a. Démontrer que les $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont les éléments propres de \mathbb{B} où \mathbf{v}_i est le i -ème vecteur colonne de \mathbb{U} .

- b. En déduire que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est une base orthonormée de \mathbb{C}^n .

□

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ décomposée dans la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$:

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \text{ tels que } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

Q. 3 a. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.$$

b. Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\|_2 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2^2 \leq \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

c. Déterminer un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

d. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}.$$

□

Q. 4 a. Montrer que la norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2.$$

b. Montrer que si \mathbb{A} est hermitienne alors

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}).$$

□

Correction

R. 1 a. Il faut montrer que $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$. Or on a

$$\mathbb{B}^* = (\mathbb{A}^* \mathbb{A})^* = \mathbb{A}^* (\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A} = \mathbb{B}.$$

b. Comme (λ, \mathbf{u}) est un élément propre de \mathbb{B} , on a $\mathbb{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. On en déduit que

$$\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \|\mathbf{u}\|_2^2.$$

De plus par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{B}^*\mathbf{u} \rangle.$$

Comme \mathbb{B} est hermitienne, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbb{B}\mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \|\mathbf{u}\|_2^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda \|\mathbf{u}\|_2^2 = \bar{\lambda} \|\mathbf{u}\|_2^2$$

et comme $\|\mathbf{u}\|_2 \neq 0$ (\mathbf{u} est un vecteur propre) on obtient $\lambda = \bar{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

c. On a

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbb{A}\mathbf{u} \rangle \text{ par propriété du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que $\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \|\mathbf{u}\|_2^2$ avec $\|\mathbf{u}\|_2 > 0$. On en déduit alors

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2} \geq 0.$$

R. 2 a. On a $\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$. Or \mathbb{U} est unitaire, donc inversible d'inverse \mathbb{U}^* . En multipliant à gauche par \mathbb{U}^* et à droite par \mathbb{U} on obtient

$$\mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U} = \mathbb{U}^*(\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*)\mathbb{U} = (\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{D}(\mathbb{U}^*\mathbb{U}) = \mathbb{D}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i &\iff \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i \\ &\iff \mathbb{B}\mathbb{U}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbb{U}\mathbf{e}_i.\end{aligned}$$

C'est à dire en posant $\mathbf{v}_i = \mathbb{U}\mathbf{e}_i$ (i -ème vecteur colonne de \mathbb{U}), les éléments propres de \mathbb{B} sont les $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. On peut noter que $\mathbf{v}_i \neq 0$ car \mathbb{U} est inversible.

b. On a

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \\ & & \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^* \\ \hline \mathbf{v}_2^* \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{v}_n^* \end{array} \right)$$

On a donc

$$\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^*\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^*\mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2^*\mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_n^*\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n^*\mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n^*\mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \mathbf{v}_i^*\mathbf{v}_j = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Comme \mathbb{U} est unitaire, on a $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}$ et donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est donc une base orthonormée de \mathbb{C}^n .

R. 3 a. On peut voir que

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_i \text{ car } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.
 \end{aligned}$$

De plus $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$.

b. On a

$$\begin{aligned}
 \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbb{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{B} \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \overline{\lambda_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \text{ car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\
 &\leq \left(\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i \right) \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}) \text{ car } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.
 \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2^2 \leq \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

- c. Pour démontrer que l'on a en fait égalité il suffit de trouver un vecteur la vérifiant, c'est à dire un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$, tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\|_2^2 = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i$$

où les λ_i sont positifs ou nuls (valeurs propres de \mathbb{B} . Pour cela on note $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'indice tel que $\lambda_k = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i$. En choisissant $\mathbf{w} = \mathbf{v}_k$ (qui est de norme 1) on obtient alors

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\mathbf{v}_k, \mathbb{A}\mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \lambda_k \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

- d. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2.$$

En utilisant les résultats de **Q.3**, 2. et 3., on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

R. 4 a. Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, i.e.

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}.$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2$.
On a $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$ et donc

$$\|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbb{U}\mathbb{A})^*\mathbb{U}\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*(\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \|\mathbb{A}\|_2.$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.

On a

$$\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

En posant $\mathbf{y} = \mathbb{U}\mathbf{x}$, on a $\mathbf{x} = \mathbb{U}^*\mathbf{y}$ car $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$ (\mathbb{U} étant unitaire). Comme \mathbb{U} est inversible on a

$$\{\mathbb{U}^*\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{y} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbb{U}^*\mathbf{y}\|_2}.$$

De plus, on a

$$\|\mathbb{U}^*\mathbf{y}\|_2^2 = \langle \mathbb{U}^*\mathbf{y}, \mathbb{U}^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbb{U}\mathbb{U}^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{y}\|_2^2$$

et donc $\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$.

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.

Ceci découle des deux égalités précédentes. En effet,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 &= \|\mathbb{U}^*(\mathbb{A}\mathbb{U})\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \\ &= \|\mathbb{A}\|_2 \end{aligned}$$

car \mathbb{U}^* unitaire

car \mathbb{U} unitaire

◇

