

# Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2024/09/23

Chapitre 1: Erreurs : arrondis, bug and Co.

Chapitre 2: Langage algorithmique

**Chapitre 3: Rappels algèbre linéaire**

Chapitre 4: Résolution de systèmes non-linéaires

Chapitre 5: Résolution de systèmes linéaires

Chapitre 6: Polynômes d'interpolation

Chapitre 7: Intégration numérique



## Proposition 1.1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes

- ①  $A$  est inversible,
- ②  $\text{rank}(A) = n$ ,
- ③  $x \in \mathbb{K}^n, Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ , (i.e.  $\ker A = \{0\}$ )
- ④  $\det(A) \neq 0$ ,
- ⑤ toutes les valeurs propres de  $A$  sont non nulles,
- ⑥ il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $AB = I$ ,
- ⑦ il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $BA = I$ .



## Exercice

Soient  $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , montrer que

$$(AB)^t = B^t A^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$(AB)^* = B^* A^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (2)$$



## Exercice

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversibles. Montrer que  $AB$  inversible et

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (4)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad (5)$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (6)$$

## ♥ Definition 2.1

Une matrice **carrée**  $A$  est :

- ◇ **symétrique** si  $A$  est réelle et  $A = A^t$ ,
- ◇ **hermitienne** si  $A = A^*$ ,
- ◇ **normale** si  $AA^* = A^*A$ ,
- ◇ **orthogonale** si  $A$  est réelle et  $AA^t = A^tA = \mathbb{I}$ ,
- ◇ **unitaire** si  $AA^* = A^*A = \mathbb{I}$ ,

## ♥ Definition

Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n$  est :

- ◇ **diagonale** si  $a_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ ,
- ◇ **triangulaire supérieure** si  $a_{ij} = 0$  pour  $i > j$ ,
- ◇ **triangulaire inférieure** si  $a_{ij} = 0$  pour  $i < j$ ,
- ◇ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◇ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (7)$$

- ◇ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (8)$$



### Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux

👉 Exercice!



### Proposition

Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

De plus on a

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

👉 Exercice!



### Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

- 1  $A$  est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e.  $A_{i,i} \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ).
- 2 Si  $A$  est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(A^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(A)_{i,i}}$$



## ♥ Definition

On appelle **matrice bloc** une matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$  écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array} \right)$$

où  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mathbb{A}_{i,j}$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{n_i, m_j}$ . On a  $N = \sum_{i=1}^p n_i$  et  $M = \sum_{j=1}^q m_j$ .

On dit que  $\mathbb{A}$  est une matrice **bloc-carrée** si  $p = q$  et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.



## Exercice

Proposer une écriture matrice bloc-carrée de chacune des matrices suivantes:

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$



### Proposition: Multiplication de matrices blocs

Soient  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}$  et  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}$ . Le produit  $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{N,S}$  peut s'écrire sous forme bloc si les matrices  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont *compatibles par blocs* : il faut que le nombre de blocs colonne de  $\mathbb{A}$  soit égale au nombre de blocs ligne de  $\mathbb{B}$  avec correspondance des dimensions, i.e.:

$$\mathbb{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_1 & \dots & m_q \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{matrix} & \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \dots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{p,1} & \dots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & \dots & s_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_q \end{matrix} & \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \dots & \mathbb{B}_{1,r} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{B}_{q,1} & \dots & \mathbb{B}_{q,r} \end{array} \right) \end{matrix}$$

avec  $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i, m_k}$  et  $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k, s_j}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . La matrice produit  $\mathbb{P}$  s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & \dots & s_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{matrix} & \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbb{P}_{1,1} & \dots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{P}_{p,1} & \dots & \mathbb{P}_{p,r} \end{array} \right) \end{matrix}$$

avec  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket$   $\mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, s_j}$  et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^q \mathbb{A}_{i,k} \mathbb{B}_{k,j}.$$



## Exercice

On considère les matrices blocs suivantes

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array} \right)$$

avec par identification

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q.1** Calculer les matrices  $AB$  et  $BA$  en utilisant l'écriture bloc.

**Q.2** Exprimer les matrices  $A(A+B)$  et  $(2B-A)(B+A)$  en fonction des matrices  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{I}$ .



## Exercice

Soient

$$A = \left( \begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array} \right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer  $AB$ .

## ♥ Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée  $\mathbb{A}$  est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices  $\mathbb{A}_{i,j} = \mathbb{O}$  pour  $i < j$  (resp.  $i > j$ ). Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}).$$

## ♥ Definition

On dit qu'une matrice bloc-carrée  $\mathbb{A}$  est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices  $\mathbb{A}_{i,j} = \mathbb{O}$  pour  $i \neq j$ . Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}$$



### Proposition

Soit  $\mathbb{A}$  une matrice bloc-carrée décomposée en  $n \times n$  blocs,  $n \geq 2$ . Si  $\mathbb{A}$  est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_{i,i} \quad (9)$$



Exercice!



## Proposition

Soit  $A$  une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en  $n \times n$  blocs.

- Si  $A$  est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en  $n \times n$  blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si  $A$  est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en  $n \times n$  blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de  $A$ . On a donc

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$
  

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

👉 Exercice à faire!



## Exercice:



Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  une matrice et  $(\lambda, u)$  un élément propre de  $A$  avec  $\|u\|_2 = 1$ .

**Q.1** En s'aidant de la base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , construire une base orthonormée  $\{x_1, \dots, x_n\}$  telle que  $x_1 = u$ .

Notons  $P$  la matrice de changement de base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$  dans la base  $\{x_1, \dots, x_n\}$  :

$$P = \left( \begin{array}{c|c|c} & & \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ & & \end{array} \right)$$

Soit  $B$  la matrice définie par  $B = P^*AP$ .

**Q.2**

1 Exprimer les coefficients de la matrice  $B$  en fonction de la matrice  $A$  et des vecteurs  $x_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$B = P^*AP.$$

2 En déduire que la première colonne de  $B$  est  $(\lambda, 0, \dots, 0)^t$ .

**Q.3** Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice que la matrice  $A$  s'écrit

$$A = UTU^*$$

où  $U$  est une matrice unitaire et  $T$  une matrice triangulaire supérieure.

**Q.4** En supposant  $A$  inversible et la décomposition  $A = UTU^*$  connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire  $Ax = b$ .





## Théorème 5: Décomposition de Schur



Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe une matrice unitaire  $U$  et une matrice triangulaire supérieure  $T$  telles que

$$A = UTU^* \quad (10)$$

👉 Décomposition de Schur avec matrice triangulaire inférieure?



## Théorème 6: Réduction de matrices



- 1 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe une matrice **unitaire**  $U$  telle que  $U^{-1}AU$  soit **triangulaire**.
- 2 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice **normale**. Il existe une matrice **unitaire**  $U$  telle que  $U^{-1}AU$  soit **diagonale**.
- 3 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice **symétrique**. Il existe une matrice **orthogonale**  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit **diagonale**.



## Proposition 6.1

- une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse  $A^t$  (resp.  $A^*$ ).

## ♥ Definition 6.2

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice **hermitienne**.

◇ Elle est **définie positive** si

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (11)$$

◇ Elle est **semi définie positive** si

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (12)$$



## Exercice

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q.1** Que peut-on dire de la matrice  $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$ ? Et si la matrice  $\mathbb{A}$  est inversible?

**Q.2** Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.

**Q.3** Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure inversible aléatoire.

## ♥ Definition

L'application  $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  définie pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$  par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (13)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (14)$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , hermitien<sup>a</sup> si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_n.$$

---

<sup>a</sup>La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (14) :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

## ♥ Definition

Une **norme** sur un espace vectoriel  $V$  est une application  $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇  $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$ ,
- ◇  $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$ ,
- ◇  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ ,  $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$  (inégalité triangulaire).

Une norme sur  $V$  est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.



## Proposition

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ . Pour tout nombre réel  $p \geq 1$ , l'application  $\|\bullet\|_p$  définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur  $\mathbb{K}^n$ .

Normes usitées :

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |v_i|.$$



## Lemme 7.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$$

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (15)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**. On a égalité si et seulement si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont colinéaires.



### Exercice:



Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q.1** Trouver  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\langle \alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$ .

**Q.2** En calculant  $\|\alpha \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$ , montrer que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2. \quad (16)$$

**Q.3** Soit  $\mathbf{x} \neq 0$ . Montrer alors que l'inégalité (16) est une égalité si et seulement si  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ .



## Lemme 7.2: Inégalité de Hölder

Pour  $p > 1$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (17)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.



### Exercice:



**Q.1** Soit la fonction  $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$  avec  $0 < \lambda < 1$ . Montrer que pour tous  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \geq 0$  on a

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta. \quad (18)$$

Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{C}^n$ . Soient  $p > 1$  et  $q > 1$  vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Q.2** On pose  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$  et  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_q}$ . En utilisant l'inégalité (18), montrer que l'on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \quad (19)$$

**Q.3** En déduire l'inégalité de Holder suivante

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q. \quad (20)$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?



### ♥ Definition 7.3

Deux **normes**  $\|\bullet\|$  et  $\|\bullet\|'$ , définies sur un même espace vectoriel  $V$ , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes  $C$  et  $C'$  telles que

$$\|\mathbf{x}\|' \leq C \|\mathbf{x}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| \leq C' \|\mathbf{x}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in V. \quad (21)$$

### 📖 Proposition

Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

## ♥ Definition 8.1

Une **norme matricielle** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une application  $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

- ❶  $\|A\| = 0 \iff A = 0$ ,
- ❷  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,
- ❸  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  (inégalité triangulaire)
- ❹  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Peut-on étendre cette définition sur  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ?



### Proposition: exercice



Etant donné une norme vectorielle  $\|\bullet\|$  sur  $\mathbb{K}^n$ , l'application  $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\|A\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (22)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée). Elle vérifie

$$\|A\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|A\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|A\mathbf{v}\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|A\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (23)$$

De plus, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$  on a

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|_s \|\mathbf{v}\| \quad (24)$$

et il existe au moins un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  tel que

$$\|A\mathbf{u}\| = \|A\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (25)$$

Soit  $I$  la matrice identité d'ordre  $n$ , on a

$$\|I\|_s = 1. \quad (26)$$



**Théorème 9:**  $\|\bullet\|_1$  : ,  $\|\bullet\|_\infty$  : ,  $\|\bullet\|_2$  : 

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (27)$$

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \quad (28)$$

$$\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (29)$$

La norme  $\|\bullet\|_2$  est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = I \implies \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2. \quad (30)$$



## Corollaire 9.1

- ❶ Si une matrice  $\mathbb{A}$  est hermitienne, on a  $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$ .
- ❷ Si une matrice  $\mathbb{A}$  est unitaire, on a  $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$ .

## ♥ Definition 10.1

Soit  $V$  un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\bullet\|$ , on dit qu'une suite  $(\mathbf{v}_k)$  d'éléments de  $V$  **converge vers un élément**  $\mathbf{v} \in V$ , si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$



## Théorème 11: admis

Soit  $\mathbb{B}$  une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- ❶  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$ ,
- ❷  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$  pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ ,
- ❸  $\rho(\mathbb{B}) < 1$ ,
- ❹  $\|\mathbb{B}\| < 1$  pour au moins une norme matricielle subordonnée  $\|\bullet\|$ .



## Théorème 12: admis

Soit  $\mathbb{B}$  une matrice carrée, et  $\|\bullet\|$  une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$