

EXERCICE 8

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

On suppose que (P-1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1

Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire.

Soient π_n le polynôme de degré $(n + 1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

et $m \in \mathbb{N}^*$.

rappel division euclidienne: Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Dans la division euclidienne de A par B, Q est le quotient et R le reste.

Q. 2

a. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. Déterminer les degrés maximaux des polynômes Q (quotient) et R (reste), obtenus par la division euclidienne de P par π_n , et satisfaisant

$$P = \pi_n Q + R.$$

b. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+m}[X], \quad \int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx. \quad (\text{P-2})$$

où Q est le quotient de la division euclidienne de P par π_n ,

R. 2

a. On effectue la division euclidienne de P, $\deg(P) \leq n + m$, par π_n , $\deg(\pi_n) = n + 1$. On a alors l'existence et l'unicité d'un couple

(Q, R) tel que $\deg(R) < \deg(\pi_n) = n + 1$, c'est à dire $R \in \mathbb{R}_n[X]$, et

$$P = \pi_n Q + R.$$

- Si $\deg(P) \leq n < (n + 1) = \deg(\pi_n)$, $Q = 0$ et $R = P$.
- Si $\deg(P) \geq (n + 1) = \deg(\pi_n) > \deg(R)$, on obtient

$$\deg(P) = \deg(\pi_n Q) = \deg(\pi_n) + \deg(Q)$$

et donc $\deg(Q) = \deg(P) - \deg(\pi_n) \leq n + m - (n + 1) = m - 1$, c'est à dire $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

En résumé, on a $R \in \mathbb{R}_n[X]$, et on peut noter que, dans les deux cas, $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

- b. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R , respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n . On vient de voir que $R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx + \int_a^b R(x)dx$$

et par linéarité de \mathcal{Q}_n

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = \mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b) + \mathcal{Q}_n(R, a, b).$$

Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n et comme $R \in \mathbb{R}_n[X]$ on obtient

$$\int_a^b R(x)dx = \mathcal{Q}_n(R, a, b).$$

On en déduit alors que

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx - \mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b).$$

Par construction $\pi_n(x_j) = 0, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b) = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j Q(x_j) \pi_n(x_j) = 0$$

et donc

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx.$$

Q. 3

Démontrer que (P-1) a pour degré d'exactitude $n + m$ au moins si et seulement si

$$\forall H \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \quad \int_a^b \pi_n(x)H(x)dx = 0. \quad (\text{P-3})$$

R. 3

\Leftarrow On suppose que (P-3) est vérifié.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R , respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n . On a vu en **Q. 2** que $R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

Comme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)Q(x)dx = 0$$

ce qui donne en utilisant (P-2):

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = 0.$$

Comme P est quelconque dans $\mathbb{R}_{n+m}[X]$, la formule de quadrature est donc de degré d'exactitude $n + m$.

\Rightarrow On suppose que la formule de quadrature est de degré d'exactitude $(n + m)$.

Pour tout $H \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, le polynôme $P = H\pi_n \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. La formule de quadrature est donc exacte pour P :

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = 0.$$

Par construction, la division euclidienne de P par π_n a pour quotient H et pour reste 0. En utilisant (P-2), on obtient alors

$$\int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx = 0.$$

Q. 4

En déduire le degré maximal d'exactitude de (P-1).

R. 4

Si $Q = \pi_n$, on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)Q(x)dx = \int_a^b Q^2(x)dx > 0.$$

Comme $\deg(\pi_n) = n + 1$, on déduit que l'on doit avoir $\deg(Q) \leq n$ pour que (P-3) soit vérifiée. On a alors

$$\deg(P) = m + n = \deg(Q) + \deg(\pi_n) \leq n + (n + 1)$$

et donc $m \leq n + 1$. Le degré maximal d'exactitude est donc $2n + 1$.

Q. 5

Démontrer que (P-1) a pour degré d'exactitude $n + m$ au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket. \tag{P-4}$$

R. 5

D'après la **Q. 3**, il suffit de démontrer que (P-3) est équivalent à (P-4).

\Rightarrow On suppose (P-3) vérifiée.

Le résultat est immédiat car, $\forall k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$, $x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

\Leftarrow On suppose (P-4) vérifiée.

Soit $H \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$. Il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k.$$

On utilise la linéarité de l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_a^b H(x) \pi_n(x) dx &= \int_a^b \pi_n(x) \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_a^b \pi_n(x) x^k dx \\ &\stackrel{(P-4)}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \times 0 = 0. \end{aligned}$$

