

EXERCICE 11

Soient $(t_i)_{i=0}^n$, $(n+1)$ points distincts de $[-1; 1]$.

On note $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies de $[-1; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $g \in \mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^1 g(t)dt$ par $\mathcal{S}_n(g)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

Q. 1

Démontrer que l'application $g \mapsto \mathcal{S}_n(g)$ définie de $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ (espace vectoriel), et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(\lambda f + \mu g) &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda 2 \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu 2 \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{S}_n(f) + \mu \mathcal{S}_n(g). \end{aligned}$$

L'application \mathcal{S}_n est donc linéaire.

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Q. 2

a. Montrer que si \mathcal{S}_n a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt. \quad (\text{P-1})$$

b. Montrer que si (P-1) est vérifiée, alors \mathcal{S}_n a pour degré d'exactitude n au moins.

R. 2

a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{S}_n(L_i) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

Comme $L_i(t_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on en déduit

$$\mathcal{S}_n(L_i) = 2 \sum_{j=0}^n w_j L_i(t_j) = 2w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (P-1), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n g(t_i) \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

On note $\mathcal{L}_n(P)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ passant par les points $(t_i, g(t_i))_{i=0}^n$ donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n(P)(t) = \sum_{i=0}^n g(t_i) L_i(t).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(t) dt &= \int_{-1}^1 \mathcal{L}_n(P)(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n L_i(t) P(t_i) dt \\ &= \sum_{i=0}^n P(t_i) \int_{-1}^1 L_i(t) dt \\ &= 2 \sum_{i=0}^n w_i P(t_i) = \mathcal{S}_n(P). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes de degré n au moins.

On rappelle que la formule de quadrature \mathcal{S}_n à $(n + 1)$ points distincts, dont les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (P-1), a pour degré

d'exactitude $(n + m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (\text{P-2})$$

avec $\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - t_i)$.

Par la suite, on suppose que les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n + 1)$ racines distinctes dans $] - 1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n + 1)$ et que les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (P-1).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{P-3})$$

avec $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = t$.

On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n ,

prop.2 la famille $\{P_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \quad (\text{P-4})$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt.$$

prop.4 Soit $n \geq 1$, P_n est scindé sur \mathbb{R} et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $] -1, 1[$, c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \quad C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacune dans l'un des $(n+1)$ intervalles $] -1, t_0[$, $]t_0, t_1[$, \dots , $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, 1[$.

Q. 3

- a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature \mathcal{S}_n est de degré d'exactitude $2n + 1$.
- b. Montrer que la formule de quadrature \mathcal{S}_n n'est pas de degré d'exactitude $2n + 2$.
- c. Démontrer que \mathcal{S}_n est l'unique formule de quadrature à $(n + 1)$ points distincts dans $[-1; 1]$ ayant pour degré d'exactitude $2n + 1$.

R. 3

- a. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (P-1), \mathcal{S}_n a pour degré d'exactitude $2n + 1$ si et seulement si on a (P-2) avec $m = n + 1$.

D'après les propriétés des polynômes de Legendre P_n , on a $P_{n+1}(t) = C\pi_n(t)$ avec $C \in \mathbb{R}^*$.

On en déduit que (P-2) avec $m = n + 1$ est équivalent à

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or, la famille des polynômes de Legendre $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, la relation précédente est vérifiée.

- b. Supposons qu'il existe une autre formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points distincts dans $[-1, 1]$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i)$$

ayant pour degré d'exactitude $(2n + 1)$ précisément. D'après la **Q. 2**, on a donc

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{w}_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{L}_i(t) dt, \quad \text{où } \tilde{L}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Notons $\tilde{\pi}_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - \tilde{t}_i)$. Comme \mathcal{S}_n et $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ont pour degré d'exactitude $(2n + 1)$ précisément, on déduit de (P-2) avec $m = n + 1$, que

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t) Q(t) dt = \int_{-1}^1 \tilde{\pi}_n(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le polynôme $R = \pi_n - \tilde{\pi}_n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ car les polynômes π_n et $\tilde{\pi}_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont unitaires. On a alors

$$\int_{-1}^1 R(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

En choisissant $Q = R$, on obtient

$$\int_{-1}^1 R^2(t) dt = 0$$

ce qui entraîne $R = 0$ et donc les points $(\tilde{t}_i)_{i=0}^n$ et $(t_i)_{i=0}^n$ sont identiques à une permutation des indices près, c'est à dire

$$\tilde{t}_{\sigma(i)} = t_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

On a alors $\tilde{w}_{\sigma(i)} = w_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i) = 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_{\sigma(i)} g(\tilde{t}_{\sigma(i)}) = 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i) = \mathcal{S}_n(g).$$

Soient a, b deux réels, $a < b$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $] -1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.

Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, espace des fonctions définies de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , et $n \in \mathbb{N}$.

On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Q. 4

a. Montrer que la formule de quadrature \mathcal{Q}_n est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^* = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x) dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{P-5})$$

b. En déduire que la formule de quadrature \mathcal{Q}_n est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^* = w_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

où les w_i sont donnée par (P-1).

a. Démontrons l'équivalence

\Rightarrow Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $L_i^\star \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i^\star(x) dx.$$

Or comme $L_i^\star(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j^\star L_i^\star(x_j) = (b - a) w_i^\star.$$

Ce qui donne

$$w_i^\star = \frac{1}{b - a} \int_a^b L_i^\star(x) dx.$$

\Leftarrow Par hypothèse, les poids $(w_i^\star)_{i=0}^n$ étant donnés par (P-5), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i^\star(x) dx.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i^*(x)P(x_i)dx \\ &= \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_a^b L_i^*(x)dx \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* P(x_i) = \mathcal{Q}_n(P, a, b). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

b. Il suffit pour celà de démontrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t)dt. \quad (R_1)$$

On utilise le changement de variable

$$x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

ce qui correspond bien à $x_i = \varphi(t_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b L_i^*(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i^* \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 L_i^* \circ \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_i^\star \circ \varphi(t) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\varphi(t) - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\varphi(t) - \varphi(t_j)}{\varphi(t_i) - \varphi(t_j)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_j\right)}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_j\right)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = L_i(t). \end{aligned}$$

ce qui donne (R_1) .

On suppose que $w_i^\star = w_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q. 5

Montrer que \mathcal{Q}_n est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[a, b]$ ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisément.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Avec le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 P \circ \varphi(t) dt. \end{aligned} \tag{R_2}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P, a, b) &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* P(x_i) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(\varphi(t)_i) \\ &= \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(P \circ \varphi) \end{aligned} \tag{R_3}$$

Comme $\varphi \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $P \circ \varphi \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.^a La formule de quadrature \mathcal{S}_n étant de degré d'exactitude $2n+1$, on a alors

$$\mathcal{S}_n(P \circ \varphi) = \int_{-1}^1 P \circ \varphi(t) dt.$$

On en déduit en utilisant (R₂)

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(P \circ \varphi)$$

puis en utilisant (R_3)

$$\int_a^b P(x)dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

La formule de quadrature élémentaire \mathcal{Q}_n est donc de degré d'exactitude $2n + 1$.

Par l'absurde on peut démontrer que \mathcal{Q}_n n'est pas de degré d'exactitude $2n + 2$ car sinon \mathcal{S}_n serait aussi de degré d'exactitude $2n + 2$.

Par l'absurde on peut démontrer que \mathcal{Q}_n est unique car sinon \mathcal{S}_n ne serait pas unique.

^aRappel: Soient $P \in \mathbb{R}_p[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_q[X]$, alors $P \circ Q \in \mathbb{R}_{pq}[X]$.

