

EXERCICE 2

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \quad (\text{P-2})$$

Q. 1

Expliciter φ^{-1} .

R. 1

On a $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-\alpha}{\beta}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Q. 2

Montrer que si $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .

R. 2

Soit $Q \in \mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} Q(t)dt = \frac{1}{\beta} \int_a^b Q \circ \varphi^{-1}(x)dx.$$

Or φ^{-1} est un polynôme de degré 1 et $Q \circ \varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $Q \circ \varphi^{-1} \in \mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k , on en déduit que

$$\int_a^b Q \circ \varphi^{-1}(x)dx = \mathcal{Q}_n(Q \circ \varphi^{-1}, a, b) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i Q \circ \varphi^{-1}(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i Q(t_i).$$

On a alors

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} Q(t)dt = \frac{b-a}{\beta} \sum_{i=0}^n w_i Q(t_i)$$

or

$$\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a) = \frac{b-\alpha}{\beta} - \frac{a-\alpha}{\beta} = \frac{b-a}{\beta}.$$

On en conclu donc que $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .

Q. 3

Montrer que si $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .

R. 3

Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_a^b P(x)dx = \beta \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P \circ \varphi(t)dt.$$

Or φ est un polynôme de degré 1 et $P \circ \varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $P \circ \varphi \in \mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k , on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P \circ \varphi(t)dt &= \mathcal{Q}_n(P \circ \varphi, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) \\ &= (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i P \circ \varphi(t_i) \\ &= (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i). \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_a^b P(x)dx = \beta (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i)$$

et comme $\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a) = \frac{b-a}{\beta}$, on en déduit que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .

