

EXERCICE 7

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

On note $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ les $(n + 1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$

Q. 1

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i((a + b) - x) = L_{n-i}(x).$$

R. 1

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $\varphi(x) = (a + b) - x$ le polynôme de degré 1 et $P = L_i \circ \varphi$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ (la composé de 2 polynômes est de degré le produit des degrés des 2 polynômes).

On a

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_{n-j} = (a + b) - x_j$$

et

$$P(x_j) = L_i((a+b) - x_j) = L_i(x_{n-j}) = \delta_{i,n-j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n-j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = n-i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{n-i,j}.$$

C'est à dire

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_j) = \delta_{n-i,j}.$$

Or L_{n-i} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la relation précédente dont $P = L_{n-i}$ (voir Exercice ??, page ??).

Q. 2

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(t) dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$

R. 2

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $t = \varphi(x) = (a + b) - x$ le changement de variable affine. On a alors $\varphi^{-1}(t) = (a + b) - t$ et

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(t) dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_b^a L_i((a+b) - x) (-1) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i((a+b) - x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_{n-i}(x) dx \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= w_{n-i}. \end{aligned}$$

