

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $A_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice \mathbb{A} . On décompose la matrice \mathbb{A} sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où \mathbb{D} représente la diagonale de \mathbb{A} , $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée \mathcal{L}_w , est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right). \quad (\text{P-1})$$

On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.

Q. 1

Montrer que

$$\mathcal{L}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}).$$

R. 1

Comme $\mathbb{E} = \mathbb{D}\mathbb{L}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{D}\mathbb{U}$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w &= \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{D}\mathbb{L} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{D}\mathbb{U} \right) \\ &= \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} [\mathbb{I} - w\mathbb{L}] \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} [(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}] \right) \\ &= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right)^{-1} \left(\frac{1}{w} \mathbb{D} \right) ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \\ &= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}). \end{aligned}$$

Q. 2

En déduire que

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w - 1|. \quad (\text{P-2})$$

La matrice \mathbb{L} est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure) \mathbb{D}^{-1} et d'une matrice triangulaire inférieure \mathbb{E} à diagonale nulle. De même la matrice \mathbb{U} est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant n la dimension de la matrice \mathcal{L}_w , et en notant $\lambda_i(\mathcal{L}_w)$ ses n valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathcal{L}_w) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_w).$$

Le rayon spectral de \mathcal{L}_w , noté $\rho(\mathcal{L}_w)$, correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathcal{L}_w) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i(\mathcal{L}_w)| \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathcal{L}_w) = \det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1 - w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) \right) = \det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) \det ((1 - w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})$$

La matrice $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit $\det \left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} \right) = 1$. La matrice $(1 - w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant $1 - w$ et donc $\det ((1 - w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}) = (1 - w)^n$. On a alors $|\det(\mathcal{L}_w)| = |1 - w|^n$ et

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n} = |1 - w|.$$

