

Exercice 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $A_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice \mathbb{A} . On décompose la matrice \mathbb{A} sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où \mathbb{D} représente la diagonale de \mathbb{A} , $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

La méthode S.O.R. (successive over relaxation) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Q. 1

Déterminer la matrice d'itération \mathbb{B} et le vecteur \mathbf{c} tels que

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

en fonction de \mathbb{D} , \mathbb{E} , \mathbb{F} , et \mathbf{b} .

R. 1

Pour la **méthode S.O.R.** on a , $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{A_{ii}}{w} x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w} A_{ii} x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right) \mathbf{x}^{[k+1]} = \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right) \mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{b}.$$

Comme la matrice $\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)$ est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right) \mathbf{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \mathbf{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est $\mathbb{B} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$ et le vecteur $\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \mathbf{b}$.

