

## EXERCICE 5

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec  $a < b$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty[$ ,  $] - \infty, a]$  ou  $\mathbb{R}$ ) et  $\Phi : I \longrightarrow I$  une application contractante.

Soit  $x_0 \in I$ . On considère la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{P-1})$$

**Q. 1** Montrer que la suite (P-1) est bien définie ( $x_k$  existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ). □

---

**R. 1** La suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , est bien définie si la relation (P-1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , connaissant  $x_0$ .

Il faut donc vérifier que,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in I$ , car il faut pouvoir calculer  $\Phi(x_k)$  et que  $\Phi$  est définie sur  $I$ .

C'est bien sur immédiat par récurrence car  $\Phi(I) \subset I$ . On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour  $k = 0$ . Par hypothèse,  $x_0 \in I$ .
  - Hérédité: on suppose  $x_k \in I$ , montrons que  $x_{k+1} \in I$ . Par définition,  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ . Puisque par hypothèse,  $\Phi(I) \subset I$ , on a  $x_{k+1} \in I$ .
- 

On va démontrer que la suite (P-1) est une suite de Cauchy.

**Q. 2** a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (\text{P-2})$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|. \quad (\text{P-3})$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq 2, |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (\text{P-4})$$

□

---

**R. 2** a. La fonction  $\Phi$  étant contractante sur  $I$ , on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[ \text{ t.q. } \forall (x, y) \in I^2, |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|.$$

On obtient alors

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ :

$$(\mathcal{P}_k) : |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation:  $(\mathcal{P}_0)$  est trivialement vraie.
- Hérédité: soit  $k \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $(\mathcal{P}_k)$  est vérifiée. Montrons que  $(\mathcal{P}_{k+1})$  est vraie. On a, en utilisant (P-1) et l'hypothèse de contraction sur  $\Phi$ ,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leq L|x_{k+1} - x_k|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq LL^k |x_1 - x_0|$$

et donc  $(\mathcal{P}_{k+1})$  est vraie.

b. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \geq 2$ . On a

$$|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right|.$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}|$$

En utilisant (P-3), on obtient alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k|.$$

En utilisant (P-2), on obtient alors (P-4).

**Q. 3**    *a. Dédurre de la question précédente que la suite (P-1) est une suite de Cauchy.*

*b. Montrer que la suite (P-1) converge vers un point fixe de  $\Phi$  à l'ordre 1 au moins.*

*c. Montrer l'unicité du point fixe.*

□

**R. 3** a. On a  $0 \leq L < 1$ , et donc  $L^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . De (P-4), on déduit alors que  $(x_k)$  est une suite de Cauchy.

On propose toutefois une démonstration détaillée.

Pour que  $(x_k)$  soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme  $0 < L < 1$ , on a

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit  $\epsilon > 0$ , pour avoir  $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$ , il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme  $1 - L > 0$ ,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction  $\ln$  étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

Or  $\ln(L) < 0$ , ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

En prenant  $M \in \mathbb{N}$  tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

- b. La suite  $(x_k)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  espace complet donc elle converge dans  $\mathbb{R}$  vers un point que l'on nomme  $\beta$ . De plus pour tout  $k$ ,  $x_k$  appartient à  $I$  fermé, donc sa limite  $\beta$  appartient aussi à  $I$ .

La fonction  $\Phi$  étant contractante sur  $I$ , elle est donc continue sur  $I$ . On a alors par continuité de  $\Phi$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$  on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc  $\beta$  est un point fixe de  $\Phi$ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$|x_{k+1} - \beta| = |\Phi(x_k) - \Phi(\beta)| \leq L|x_k - \beta|.$$

Comme  $0 \leq L < 1$ , la convergence est au moins d'ordre 1.

- c. On suppose qu'il existe  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $[a, b]$  tels que  $\Phi(\beta_1) = \beta_1$  et  $\Phi(\beta_2) = \beta_2$ . Dans ce cas on a

$$|\beta_1 - \beta_2| = |\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)| \leq L|\beta_1 - \beta_2|.$$

On en déduit

$$(1 - L)|\beta_1 - \beta_2| \leq 0$$

Comme  $1 - L > 0$ , on en déduit  $\beta_1 = \beta_2$ , c'est à dire l'unicité du point fixe.

