

Théorème : *Convergence locale de la méthode du point fixe*

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de α .

Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leq \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (\text{P-1})$$

si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Proof. On va construire un intervalle fermé borné, noté \mathcal{V} , pour lequel les hypothèses du Théorème 1.4 sont vérifiées. Comme Φ' est continue dans un voisinage de α avec $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[, \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ En notant I le voisinage de α où Φ est \mathcal{C}^1 , et comme Φ' est continue en α , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \left(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\Phi'(x) - \Phi'(\alpha)| < \varepsilon \right).$$

On note $M = \Phi'(\alpha)$ et on prend $\varepsilon = 1 - |M|$ qui est strictement positif car $0 \geq |M| = |\Phi'(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, il existe $\beta > 0$ tel que $] \alpha - \beta, \alpha + \beta[\subset I$ et

$$\forall x \in I, \left(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\Phi'(x) - M| < 1 - |M| \right).$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - \alpha| < \beta$, c'est à dire $x \in] \alpha - \beta, \alpha + \beta[$, alors on a

$$\begin{aligned} |\Phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow -1 + |M| < \Phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow -1 + M + |M| < \Phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$

Comme $-|M| \leq M \leq |M|$, on a $M + |M| \geq 0$ et $M - |M| \leq 0$, ce qui entraîne

$$|\Phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow -1 < \Phi'(x) < 1.$$

□

En posant $\delta = \beta/2$ (par ex.), on obtient, en définissant $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

Comme l'intervalle \mathcal{V} est un fermé et que l'application $|\Phi'|$ est continue sa borne supérieure est atteinte dans \mathcal{V} :

$$\exists \bar{x} \in \mathcal{V} \text{ tel que } |\Phi'(\bar{x})| = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\Phi'(x)|.$$

On a donc $L = |\Phi'(\bar{x})| < 1$.

Montrons que $\Phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. En effet, d'après la formule de Taylor-Lagrange:

$\forall x \in \mathcal{V}, \exists \xi \in]\min(x, \alpha), \max(x, \alpha)[\subset \mathcal{V}$ tel que

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha) + (x - \alpha)\Phi'(\xi).$$

On en déduit

$$|\Phi(x) - \Phi(\alpha)| = |x - \alpha||\Phi'(\xi)| \leq \delta |\Phi'(\xi)| \leq \delta$$

Comme $\Phi(\alpha) = \alpha$, on obtient $|\Phi(x) - \alpha| \leq \delta$ i.e. $\Phi(x) \in \mathcal{V}$.

On peut donc appliquer le Théorème 1.4 avec $[a, b] = \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$) ce qui permet de conclure. □

