

EXERCICE 7

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.

Q. 1 Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$. □

R. 1 Il suffit de voir que $\sqrt{2}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - 2$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt{2} - x_k $
1	$\frac{3}{2}$	8.57864e-02
2	$\frac{17}{12}$	2.45310e-03
3	$\frac{577}{408}$	2.12390e-06

Avec $x_0 = \frac{5}{4}$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt{2} - x_k $
1	$\frac{57}{40}$	1.07864e-02
2	$\frac{6449}{4560}$	4.08236e-05
3	$\frac{83176801}{58814880}$	5.89203e-10



Q. 2 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de \sqrt{a} où a est un réel positif. □

R. 2 Il suffit de voir que \sqrt{a} est la racine positive de $f(x) = x^2 - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec $a = 3$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt{3} - x_k $
1	2	2.67949e-01
2	$\frac{7}{4}$	1.79492e-02
3	$\frac{97}{56}$	9.20496e-05

Q. 3 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$. □

R. 3 Il suffit de voir que $\sqrt[n]{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^n - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n + a}{nx_k^{n-1}}$$

Avec $a = 3$, $n = 4$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt[4]{3} - x_k $
1	$\frac{3}{2}$	1.83926e-01
2	$\frac{97}{72}$	3.11482e-02
3	$\frac{115403137}{87616608}$	1.06368e-03
4	$\frac{236297297271008837816738085152257}{179546943199700984864483416264832}$	1.28780e-06

