

## EXERCICE 1

Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\mathbb{B} = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$ .

Q. 1

Soit  $(\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  un élément propre de  $\mathbb{B}$ .

- a. Montrer que la matrice  $\mathbb{B}$  est hermitienne.
- b. Montrer que les valeurs propres de  $\mathbb{B}$  sont réelles.
- c. En déduire que

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}.$$

La matrice  $\mathbb{B}$  étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice  $\mathbb{U}$  unitaire et une matrice  $\mathbb{D}$  diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U} \mathbb{D} \mathbb{U}^*.$$

On note  $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  les éléments propres de  $\mathbb{D}$ . Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  et  $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$ .

Q. 2

- a. Démontrer que les  $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  sont les éléments propres de  $\mathbb{B}$  où  $\mathbf{v}_i$  est le  $i$ -ème vecteur colonne de  $\mathbb{U}$ .
- b. En déduire que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^n$ .

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$  décomposée dans la base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ :

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \text{tels que } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

Q. 3

a. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.$$

b. Montrer que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\|_2 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2^2 \leq \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

c. Déterminer un vecteur  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ , tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

d. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}.$$

Q. 4

a. Montrer que la norme  $\|\bullet\|_2$  est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = \mathbb{I} \implies \|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

b. Montrer que si  $A$  est hermitienne alors

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

## Correction

R. 1

a. Il faut montrer que  $B = B^*$ . Or on a

$$B^* = (A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A = B.$$

b. Comme  $(\lambda, \mathbf{u})$  est un élément propre de  $B$ , on a  $B\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ . On en déduit que

$$\langle B\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \bar{\lambda} \|\mathbf{u}\|_2^2.$$

De plus par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle B\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, B^*\mathbf{u} \rangle.$$

Comme  $B$  est hermitienne, on obtient

$$\begin{aligned} \langle B\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{u}, B\mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \|\mathbf{u}\|_2^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda \|u\|_2^2 = \overline{\lambda} \|u\|_2^2$$

et comme  $\|u\|_2 \neq 0$  ( $u$  est un vecteur propre) on obtient  $\lambda = \overline{\lambda}$ , c'est à dire  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

c. On a

$$\begin{aligned} \langle Bu, u \rangle &= \langle A^* Au, u \rangle \\ &= \langle Au, Au \rangle \quad \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \|Au\|_2^2. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que  $\langle Bu, u \rangle = \lambda \|u\|_2^2$  avec  $\|u\|_2 > 0$ . On en déduit alors

$$\lambda = \frac{\|Au\|_2^2}{\|u\|_2^2} \geq 0.$$

R. 2

a. On a  $B = UDU^*$ . Or  $U$  est unitaire, donc inversible d'inverse  $U^*$ . En multipliant à gauche par  $U^*$  et à droite par  $U$  on obtient

$$U^*BU = U^*(UDU^*)U = (U^*U)D(U^*U) = D.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} D\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i &\iff U^*BU\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \\ &\iff BU\mathbf{e}_i = \lambda_i U\mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

C'est à dire en posant  $\mathbf{v}_i = U\mathbf{e}_i$  ( $i$ -ème vecteur colonne de  $U$ ), les éléments propres de  $B$  sont les  $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ . On peut noter que  $\mathbf{v}_i \neq 0$  car  $U$  est inversible.

b. On a

$$\mathbb{U} = \left( \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \\ \hline \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{U}^* = \left( \begin{array}{c} \mathbf{v}_1^* \\ \hline \mathbf{v}_2^* \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{v}_n^* \end{array} \right)$$

On a donc

$$\mathbb{U}^* \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (\mathbb{U}^* \mathbb{U})_{i,j} = \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Comme  $\mathbb{U}$  est unitaire, on a  $\mathbb{U}^* \mathbb{U} = \mathbb{I}$  et donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (\mathbb{U}^* \mathbb{U})_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  est donc une base orthonormée de  $\mathbb{C}^n$ .

R. 3

a. On peut voir que

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_i \text{ car } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.\end{aligned}$$

De plus  $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1$ .

b. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{B}\mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \lambda_i \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\
&\leq \left( \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i \right) \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}) \quad \text{car } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.
\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{v}\|_2 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2^2 \leq \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

c. Pour démontrer que l'on a en fait égalité il suffit de trouver un vecteur la vérifiant, c'est à dire un vecteur  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$ , tel que

$$\|\mathbb{A}\mathbf{w}\|_2^2 = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i$$

où les  $\lambda_i$  sont positifs ou nuls (valeurs propres de  $\mathbb{A}$ ). Pour cela on note  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  l'indice tel que  $\lambda_k = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i$ . En choisissant  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_k$  (qui est de norme 1) on obtient alors

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\mathbf{v}_k, \mathbb{A}\mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbb{A} \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \lambda_k \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

d. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2.$$

En utilisant les résultats de **Q.3**, 2. et 3., on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}.$$

**R. 4**

a. Soit  $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  unitaire, i.e.

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}.$$

- Montrons que  $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2$ .

On a  $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}$  et donc

$$\|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbb{U}\mathbb{A})^* \mathbb{U}\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* (\mathbb{U}^* \mathbb{U}) \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \|\mathbb{A}\|_2.$$

- Montrons que  $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$ .



On a

$$\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

En posant  $\mathbf{y} = \mathbb{U}\mathbf{x}$ , on a  $\mathbf{x} = \mathbb{U}^*\mathbf{y}$  car  $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$  ( $\mathbb{U}$  étant unitaire). Comme  $\mathbb{U}$  est inversible on a

$$\{\mathbb{U}^*\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{y} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbb{U}^*\mathbf{y}\|_2}.$$

De plus, on a

$$\|\mathbb{U}^*\mathbf{y}\|_2^2 = \langle \mathbb{U}^*\mathbf{y}, \mathbb{U}^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbb{U}\mathbb{U}^*\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{y}\|_2^2$$

et donc  $\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$ .

- Montrons que  $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$ .

Ceci découle des deux égalités précédentes. En effet,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 &= \|\mathbb{U}^*(\mathbb{A}\mathbb{U})\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \\ &= \|\mathbb{A}\|_2 \end{aligned}$$

car  $\mathbb{U}^*$  unitaire

car  $\mathbb{U}$  unitaire

◇

