

## EXERCICE 1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note

$$\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle  $\|\bullet\|_\infty$ .

Q. 1

*Montrer que*

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_\infty = 1}} \|Ax\|_\infty \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

Q. 2

a. Déterminer un  $y \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|y\|_\infty = 1$  tel que

$$\|Ay\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. Conclure.

Q. 3

[Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée *NormInf*, calculant  $\|A\|_\infty$ .

Correction

R. 1

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ . On a

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(\mathbb{A}\mathbf{x})_i| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

R. 2

a. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que

$$\sum_{j=1}^n |A_{k,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

On a, pour tout  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(\mathbb{A}\mathbf{y})_i| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right|.$$

On va construire un vecteur  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ , tel que

$$\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|.$$

On sait déjà que, si  $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ ,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|.$$

On va donc construire  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ , de telle sorte que

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|.$$

Il suffit pour celà de prendre,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_j = \begin{cases} \frac{|A_{k,j}|}{A_{k,j}} & \text{si } A_{k,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } A_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

et on a bien  $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ . On a alors

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}| \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|$$

et donc

$$\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\infty = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. D'après la proposition/définition des normes matricielles subordonnées, on a

$$\|A\|_{\infty} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_{\infty} = 1}} \|A\mathbf{x}\|_{\infty}.$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

**R. 3**

Voici une possibilité de fonction:

---

**Algorithme 1** Fonction **NormInf** permettant de calculer  $\|A\|_\infty$

---

**Données :**  $A$  : matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Résultat :**  $r$  : le réel  $r = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

```
1: Fonction  $r \leftarrow \text{NormInf}(A)$ 
2:    $n \leftarrow$  nb de lignes de  $A$ 
3:    $r \leftarrow 0$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:      $S \leftarrow 0$ 
6:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n$  faire
7:        $S \leftarrow S + |A(i, j)|$ 
8:     Fin Pour
9:     Si  $r < S$  alors
10:       $r \leftarrow S$ 
11:     Fin Si
12:   Fin Pour
13: Fin Fonction
```

---

