

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (\text{P-1})$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})^{1/2}, \quad (\text{P-2})$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (\text{P-3})$$

Correction

- On démontre tout d'abord l'égalité (P-1) :

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(\mathbb{A}\mathbf{x})_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| = \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\ &\leq \left(\max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \text{ car } \sum_{j=1}^n |x_j| = 1. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 \leq \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

Pour démontrer que l'on a l'égalité

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

il suffit alors de construire un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$ particulier la vérifiant. Pour cela on note $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'indice tel que

$$\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

On prend alors $\mathbf{y} = \mathbf{e}_k$ le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Dans ce cas on a $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$ et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_1 &= \|\mathbb{A}\mathbf{e}_k\|_1 = \|\mathbb{A}_{:,k}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^n |a_{i,k}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|. \end{aligned}$$

Ce qui démontre l'égalité (P-1).

- On démontre maintenant l'égalité (P-2) :

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}\mathbb{A}^*)^{1/2}.$$

On pose $\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{A}^*$. \mathbb{B} est une matrice hermitienne : ses valeurs propres sont réelles. Soit (λ, \mathbf{u}) un élément propre de \mathbb{B} . On obtient alors

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \text{ car } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \lambda \|\mathbf{u}\|_2^2\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\langle \mathbb{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbb{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbf{u}, \mathbb{A}^*\mathbf{u} \rangle = \|\mathbb{A}^*\mathbf{u}\|_2^2 \geq 0$$

et comme $\|\mathbf{u}\|_2 > 0$ (c'est un vecteur propre, il est donc non nul) on en déduit

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}^*\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2} \geq 0.$$

La matrice \mathbb{B} étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème ?? page ??, il existe alors une matrice \mathbb{U} unitaire et une matrice \mathbb{D} diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les éléments propres de \mathbb{D} . Les vecteurs \mathbf{e}_i sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^n et $\lambda_i = d_{ii}$. Comme $\mathbb{D} = \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i &\iff \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \\ &\iff \mathbb{B}\mathbb{U}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbb{U}\mathbf{e}_i.\end{aligned}$$

C'est à dire en posant $\mathbf{v}_i = \mathbb{U}\mathbf{e}_i$ (i -ème vecteur colonne de \mathbb{U}), les éléments propres de \mathbb{B} sont les $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. De plus comme \mathbb{U} est unitaire, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ forment une base orthonormée de \mathbb{C}^n .

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$. le vecteur \mathbf{x} peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la base orthonormée $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$: $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i.$$

On peut voir que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_i \text{ car } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{B}\mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \overline{\lambda_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\
&\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}) \quad \text{car } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Pour démontrer que l'on a en fait égalité il suffit de trouver un vecteur la vérifiant. Pour celà on note $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'indice tel que $\lambda_k = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i$. En choisissant $\mathbf{x} = \mathbf{v}_k$ (qui est de norme 1) on obtient alors

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\mathbf{v}_k, \mathbb{A}\mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbb{A}^* \mathbb{A}\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \lambda_k \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A}).$$

Ce qui achève la démonstration de (P-2)

- Pour finir, on démontre l'égalité (P-3) :

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(\mathbb{A}\mathbf{x})_i| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'égalité, il suffit de construire un vecteur \mathbf{y} de norme 1 la vérifiant. Pour cela on note $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'indice tel que

$$\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

On veut alors construire un vecteur \mathbf{y} tel que $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ et vérifiant

$$\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

Pour cela on pose, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$y_j = \begin{cases} \frac{|a_{k,j}|}{a_{k,j}} & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

On a alors $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$,

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$$

On en déduit

$$\|\mathbb{A}\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

ce qui achève la démonstration.

