

Analyse Numérique I*

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2025/12/06

Chapitre VI

Intégration numérique

On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

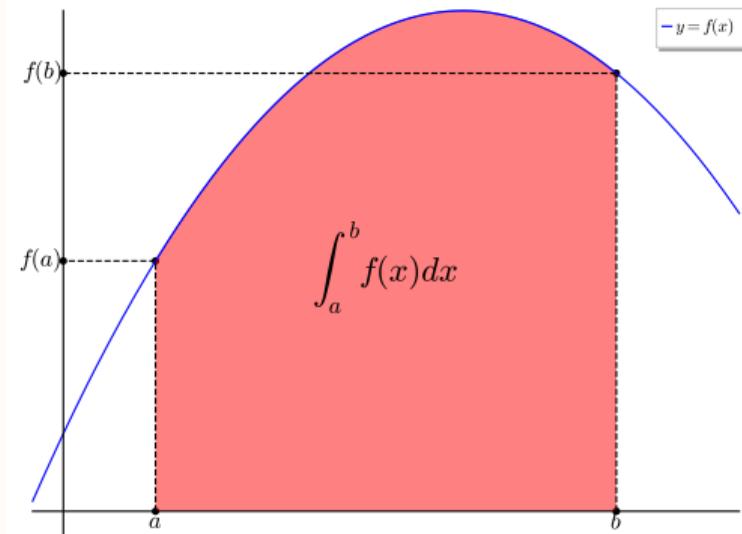


Figure: Représentation de $\int_a^b f(x)dx$ (aire de la surface colorée)

❤️ Definition 6.1

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (1)$$

avec $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a, b]$ distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \quad (2)$$

❤️ Definition 6.2

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude p** si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p .

Exercice 1



Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1

Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire et continue.

Q. 2

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \quad (2)$$

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Proposition 6.1

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points (distincts deux à deux dans $[a, b]$).

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire continue, et elle a pour degré d'exactitude $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket.$$

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

Formule du rectangle à gauche

$$f(x) \approx f(a)$$

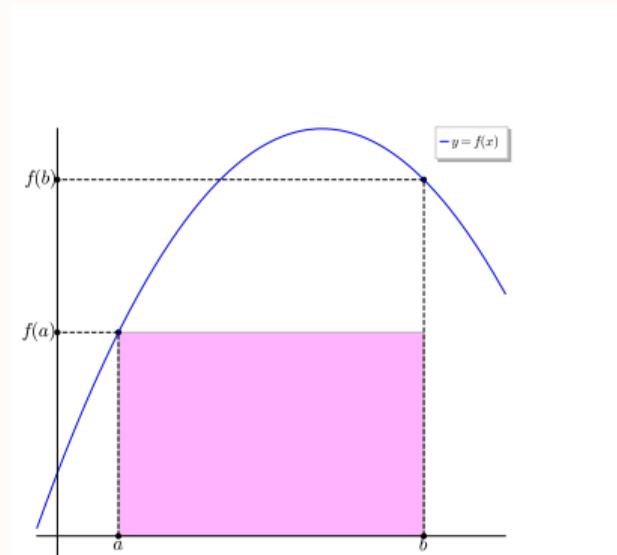


Figure: Formule du rectangle à gauche : $\int_a^b f(x) dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f(a)$ (aire de la surface colorée)

Formule du rectangle à droite

$$f(x) \approx f(b)$$

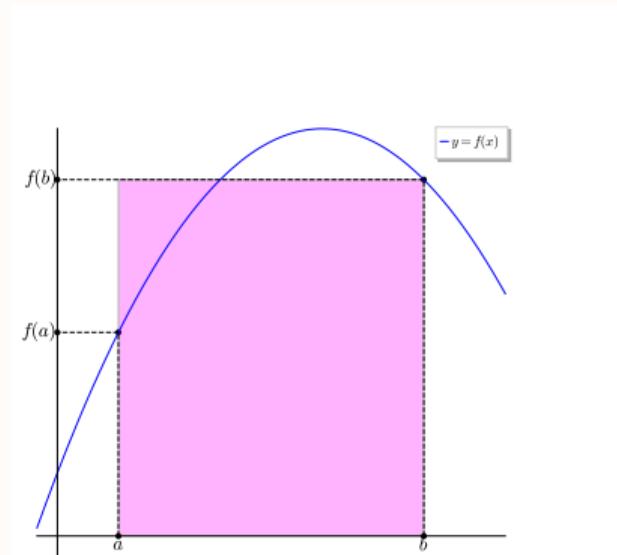


Figure: Formule du rectangle à droite : $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f(b)$ (aire de la surface colorée)

Formule du point milieu

$$f(x) \approx f((a + b)/2)$$

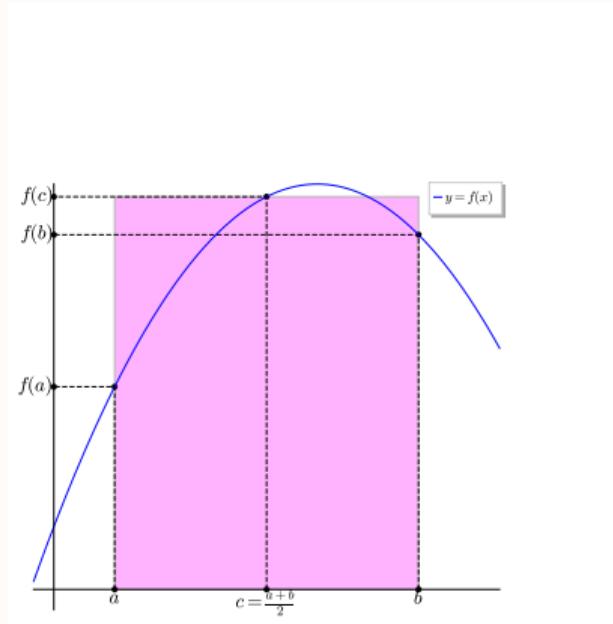


Figure: Formule du point milieu : $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f((a + b)/2)$ (aire de la surface colorée)

Exercice 2

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \quad (2)$$

Q. 1

Expliquer φ^{-1} .

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Q. 2

Montrer que si $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .

Q. 3

Montrer que si $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Proposition 6.2

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (distincts deux à deux dans $[a, b]$).

On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \quad (3)$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .

Par ex. $\varphi(t) = a + (b - a)t$, $\varphi(t) = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}t$.

Exercice 3



Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $Q_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire,

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

où les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels à déterminer.

Q. 1

Démontrer que (1) est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (2)$$

Q. 2

Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $(n + 1)$ points de degré d'exactitude n au moins.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Proposition 6.3

La formule de quadrature élémentaire (1) à $(n + 1)$ points, distincts deux à deux, est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (4)$$

Proposition 6.4

Soient $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $(n + 1)$ points de degré d'exactitude n au moins. Les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont alors solutions de

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b - a}{2} \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Exercice 4



Soient $(x_i)_{i=0}^n$ ($n + 1$) points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Ecrire une fonction algorithmique `WeightsFromPoints` permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.1.4. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\mathbf{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b - a}{2} \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Proposition 6.5

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points (distincts deux à deux). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (6)$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $(2m + 1)$.

voir Exercice 5 ➔

Exercice 5

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $Q_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (2)$$

Q. 1

① Etablir que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i - \frac{a + b}{2} = - \left(x_{n-i} - \frac{a + b}{2} \right).$$

② Si n est impair, montrer que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i \neq \frac{a + b}{2}$.

③ Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_i = \frac{a + b}{2}$.

④ En justifiant, donner explicitement un exemple de points $(x_i)_{i=0}^n$ vérifiant (2) (n restant quelconque).

Q. 2

Démontrer que l'application $f \mapsto Q_n(f, a, b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire et continue.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $(2m + 1)$ s'écrivant sous la forme

$$P(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3

① Calculer les dérivées $P^{(2m+1)}$ et $P^{(2m+2)}$.

② Montrer que

$$P(x) = C \left(x - \frac{a + b}{2} \right)^{2m+1} + R(x) \quad (3)$$

en déterminant le degré maximum de R et en exprimant C en fonction des $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

Q. 4

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \left(x - \frac{a + b}{2} \right)^{2k+1} dx = 0. \quad (4)$$

Q. 5

On suppose que la formule de quadrature élémentaire (1) est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

① Déduire de (3) et (4) que la formule de quadrature élémentaire (1) est exacte pour P si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a + b}{2} \right)^{2m+1} = 0. \quad (5)$$

② En utilisant Q. 1, démontrer que (5) est toujours vérifiée.

Q. 6

Écrire de manière très précise le résultat démontré.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Proposition 6.6

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (distincts deux à deux).

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (7)$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b - a)$.

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{1}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (8)$$

voir Exercice 6 ➔

Exercice 6

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

On note, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange

associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

et que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b], f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (2)$$

Q. 2 Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt. \quad (3)$$

Q. 3 ① Montrer que si \mathcal{Q}_n a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx. \quad (4)$$

② Montrer que si (4) est vérifiée, alors \mathcal{Q}_n a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 4 On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (4). Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (5)$$



Lemme 6.1

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

On a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins n si n est impair et au moins $(n + 1)$ sinon.

voir Exercice 7 ➔

Exercice 7

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

On note $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ les $(n + 1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$

Q. 1 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i((a + b) - x) = L_{n-i}(x).$$

Q. 2 Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b L_i(t) dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Proposition 6.7

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ défini par (1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n . Elle est alors de degré d'exactitude $(n + m)$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x) Q(x) dx = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (9)$$

où π_n est le polynôme de degré $(n + 1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (10)$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points est $(2n + 1)$.
De plus, on a

$$(9) \iff \int_a^b \pi_n(x) x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket. \quad (11)$$

voir Exercice 8 ➔

Exercice 8

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels. On suppose que (1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

Soient π_n le polynôme de degré $(n + 1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

et $m \in \mathbb{N}^*$.

rappel division euclidienne: Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

Dans la division euclidienne de A par B , Q est le quotient et R le reste.

Q. 2

① Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. Déterminer les degrés maximaux des polynômes Q (quotient) et R (reste), obtenus par la division euclidienne de P par π_n , et satisfaisant

$$P = \pi_n Q + R.$$

② En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+m}[X], \quad \int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx. \quad (2)$$

où Q est le quotient de la division euclidienne de P par π_n ,

Q. 3

Démontrer que (1) a pour degré d'exactitude $(n + m)$ au moins si et seulement si

$$\forall H \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \quad \int_a^b \pi_n(x)H(x)dx = 0. \quad (3)$$

Q. 4

En déduire le degré maximal d'exactitude de (1).

Q. 5

Démontrer que (1) a pour degré d'exactitude $(n + m)$ au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket. \quad (4)$$

Avec une **discrétisation régulière** de l'intervalle $[a, b]$:

Méthode de Newton-Cotes .

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme $\int_a^b w(x)f(x)dx$:

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- **méthode de Gauss-Legendre**,
- méthode de Gauss-Jacobi,
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermite,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

- Méthodes de quadrature élémentaires
- **Formules élémentaires de Newton-Cotes**
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

Proposition 6.8

Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une discréttisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/n$. Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

où les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont donnés par (7).

Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal n si n est impair et $(n + 1)$ sinon.

n	d.e.	w_i (poids)							nom		
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						trapèze		
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$					Simpson		
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				Newton		
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$			Villarceau		
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$?		
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$	Weddle		
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$?	
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$?

Table: Méthodes de Newton-Cotes

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (12)$$

Calcul des coefficients w_i ? :

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (12)$$

Calcul des coefficients w_i ? : **Méthode 1 :**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$: on résoud le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = 1, & (f(x) = 1) \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = a+h, & (f(x) = x) \\ a^2w_0 + (a+h)^2w_1 + (a+2h)^2w_2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(3a^2 + 6ah + 4h^2), & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Mais il y a plus simple ...

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (12)$$

Calcul des coefficients w_i ? : **Méthode 2 :**

Formule doit être exacte pour les monômes $1, X, X^2$ et les w_i ne dépendent pas de l'intervalle $[a, b]$: on peut les calculer sur l'intervalle $[0, 1]$ en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 &= 1, \quad (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2}w_1 + 1 \times w_2 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (12)$$

Calcul des coefficients w_i ? : **Méthode 3** : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$w_i = \int_0^1 L_i(t)dt, \quad \text{avec } L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{nt - j}{i - j}$$

$$L_0(t) = \frac{2t-1}{-1} \frac{2t-2}{-2} = (2t-1)(t-1)$$

$$L_1(t) = \frac{2t}{1} \frac{2t-2}{-1} = -4(t-1)t$$

$$L_2(t) = \frac{2t}{2} \frac{2t-1}{1} = (2t-1)t$$

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (12)$$

Degré d'exactitude 3 : au moins ordre 3

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6} \left(0^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1^4 \right) = \frac{5}{24}$$

Exercice 9



Q. 1

Ecrire une fonction algorithmique WeightsPointsNC retournant les $(n + 1)$ points et les $(n + 1)$ poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points.

Q. 2

Ecrire une fonction algorithmique QuadElemNC retournant la valeur de $Q_n(f, a, b)$ correspondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points.

```
cuvelier@ardwen:~$ sage
```

```
SageMath version 10.3, Release Date: 2024-03-19
Using Python 3.12.3. Type "help()" for help.
```

```
sage: %paste
var('t')

def BaseLagrange(n,i):
    L=1
    for j in range(n+1):
        if i!=j:
            L=L*(n*t-j)/(i-j)
    return L

def NewtonCotes(n):
    W=[];
    for i in range(n+1):
        W.append(integrate(BaseLagrange(n,i),t,0,1))
    return W
## -- End pasted text --
t
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage: 
```

Problème lorsque n devient grand! : illustration sur un exemple simple.

Soit $f(x) = 3x + 2$, $a = 0$ et $b = 1$.

- Les formules de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points, $n \geq 1$, sont exactes car f est un polynôme de degré 1.
- les poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or x_i et w_i sont approchés à $\approx 1e - 16$ près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad w_i \approx \tilde{w}_i$$

- **Newton-Cotes exacte** : $\sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$
- **Newton-Cotes approchée** : $\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$

error

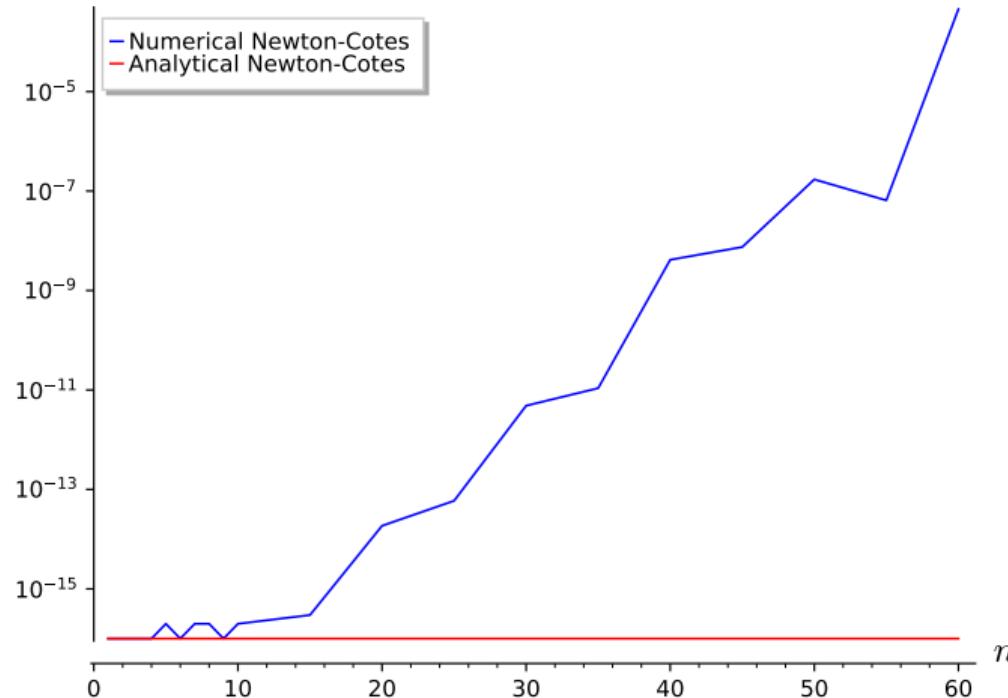


Figure: Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

Remarque 6.1

Pour les méthodes de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grandes erreurs. Au delà de $n = 7$, des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert![†]

[†]Traduction : utiliser la relation de Chasles

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- **Formules élémentaires de Gauss-Legendre**
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

$$Q_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $(2n + 1)$?

Pour cela il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^n$ appartenant à $[a, b]$ distincts 2 à 2.

Exercice 10



Q. 1

Déterminer les points t_0, t_1 de l'intervalle $[-1, 1]$ et les poids w_0, w_1 tel que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^1 w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2

En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ qui soit de degré d'exactitude 3.

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude $(2n + 1)$?

Oui pour $n = 1$! Et pour $n > 1$?

Pour cela il faut déterminer les points $(x_i)_{i=0}^n$ appartenant à $[a, b]$ distincts 2 à 2.

Les **polynômes de Legendre** vont être d'une grande utilité!

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \forall n \geq 1 \quad (13)$$

avec $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = t$.

On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n ,

prop.2 la famille $\{P_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \quad (14)$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt.$$

prop.4 Soit $n \geq 1$, P_n est scindé sur \mathbb{R} et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $] -1, 1 [$, c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \quad C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $] -1, t_0 [$, $] t_0, t_1 [$, \dots , $] t_{n-2}, t_{n-1} [$, $] t_{n-1}, 1 [$.



Proposition 6.9 :

Exercice ou

Soit $(t_i)_{i=0}^n$ les $(n+1)$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et w_i les poids donnés par (7). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$.

n	exactitude	w_i (poids)	t_i (points)
0	1	1	0
1	3	1/2, 1/2	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	5/18, 8/18, 5/18	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table: Méthodes de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$

Théorème 6.1 :



Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 6.9. Alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty}}{(2n+2)!} \int_a^b \pi_n(x)^2 dx \quad (15)$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

Exercice 11

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1, 1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $n+1$ racines du polynôme de Legendre $P_{n+1}(t)$. Cette formule a pour degré d'exactitude $2n+1$.

Soient $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|P\| = \langle P, P \rangle^{1/2}$ la norme associée.

Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1 Montrer que

$$c_{n+1}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - c_nM_{n-1}(t), \quad n > 1 \quad (1)$$

avec

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2 - 1}}$$

On définit le vecteur $\mathbf{M}(t)$ de \mathbb{R}^{n+1} par

$$\mathbf{M}(t) = (M_0(t), \dots, M_n(t))^t.$$

Q. 2 Montrer que l'on a

$$t\mathbf{M}(t) = \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1} \quad (2)$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients c_1, \dots, c_n . Le vecteur \mathbf{e}_{n+1} étant le $(n+1)$ -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Q. 3 En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de \mathbb{A} .

Q. 4 Montrer que

$$2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad (3)$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale (w_0, \dots, w_n) et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = M_j(t_i)$, $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

Q. 5

① Montrer que $2\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \mathbb{I}$.

② En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P} \mathbb{P}^t$.

③ En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_i))^2$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithme eig(A)** retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} .

Q. 6

① Ecrire la fonction $[\mathbf{t}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ retournant le tableau des points \mathbf{t} et le tableau des poids \mathbf{w} en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.

② Ecrire la fonction $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- **Méthodes de quadrature composées**
- Erreurs méthodes composées

Definition 6.3

Soit $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ une subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx. \quad (16)$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g, a, b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points d'ordre p donnée par

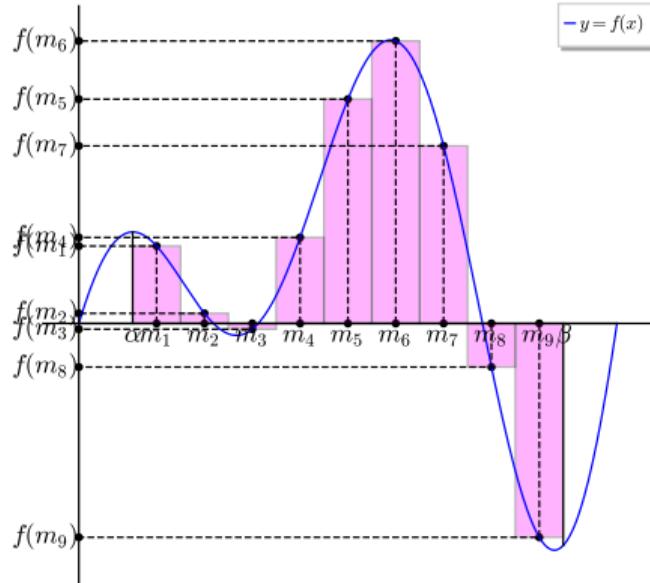
$$\mathcal{Q}_n(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

La **méthode de quadrature composée associée à \mathcal{Q}_n** , notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (17)$$

\mathcal{Q}_n degré d'exactitude $p \Rightarrow \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ degré d'exactitude p

Formule composite des points milieux



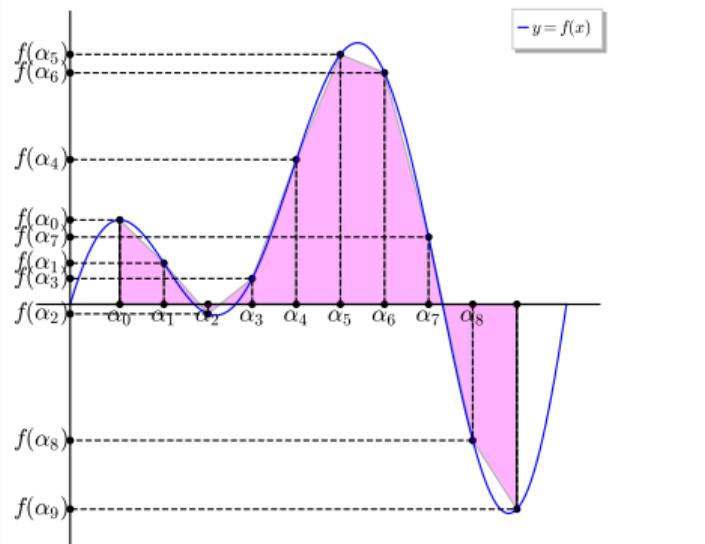
$$Q_0(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a)g\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k Q_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = h \sum_{j=1}^k f(m_j)$$

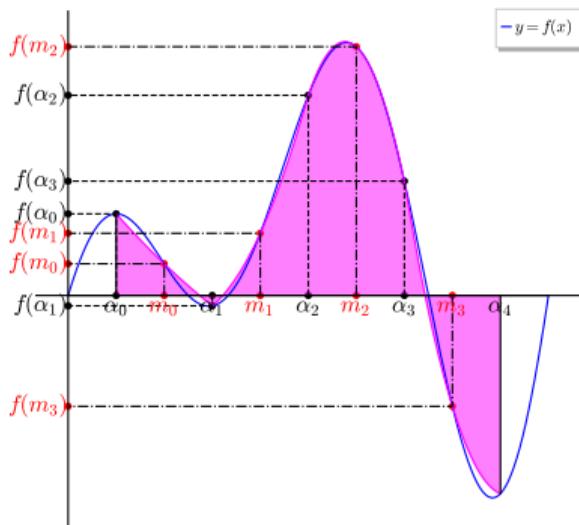
Formule composite des trapèzes



$$\mathcal{Q}_1(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b - a}{2}(g(a) + g(b))$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k \mathcal{Q}_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j)) \end{aligned}$$

Formule composite de Simpson



$$\mathcal{Q}_2(g, a, b)$$

def

$$\frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b))$$

m_j milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^k \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \\ &\approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j)) \end{aligned}$$

Exercice 12



Ecrire une fonction algorithmique **QuadSimpson** retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f . On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$Q_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right).$$

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- **Erreurs méthodes composées**

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta). \quad (18)$$

On a alors

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f) = \sum_{j=1}^k \left(\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \right) = \sum_{j=1}^k \mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)$$

et on a vu que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx$$

Si x_i **discrétisation régulière** de $[a, b]$, on peut démontrer (voir **[Crouzeix-Mignot]**)

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \log(n)} (b-a)^{n+1}.$$

En notant $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$, $h = \max_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket} h_j$ et K_n un majorant de $\max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| &\leq \sum_{j=1}^k |\mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)| \\
 &\leq \sum_{j=1}^k \frac{K_n}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]} |f^{(n+1)}(x)| h_j^{n+2} \\
 &\leq K_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)| \sum_{j=1}^k h_j \\
 &\leq K_n (\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Mais majoration non optimale!

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$

$$|\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^{\text{comp}}(f)| \leq K_n(\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

A l'aide des **noyaux de Peano** :

Théorème 6.2 : [Crouzeix-Mignot], page 43 (admis)

Soient $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire \mathcal{Q}_n de degré d'exactitude $p \geq n$ et $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$. On a alors

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) \right| \leq C_p(\beta - \alpha) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_{\infty} \quad (19)$$

avec $h = \max_{j \in \llbracket 1, k \rrbracket} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$. Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) \right| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad (20)$$

et son **ordre de convergence** est $(p+1)$.

Présentir l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

- Pour Simpson: $E(h) = \mathcal{O}(h^4) = Ch^4$
- Pour Trapèze: $E(h) = \mathcal{O}(h^2) = Ch^2$

$$E(h) = Ch^p, \implies E(h/10) = C(h/10)^p = \frac{E(h)}{10^p}$$

Listing: : Script Matlab/Octave pour illustrer l'ordre des méthodes des Trapèzes et de Simpson

```
f=@(x) cos(x);
F=@(x) sin(x);
a=0; b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a);
I1=QuadTrapeze(f,a,b,10);
I2=QuadTrapeze(f,a,b,100);
fprintf('ErreursTrapèze: (N=10) %.5e - (N=100) %.5e\n', abs(I1-Iex), abs(I2-Iex))
I1=QuadSimpson(f,a,b,10);
I2=QuadSimpson(f,a,b,100);
fprintf('ErreursSimpson: (N=10) %.5e - (N=100) %.5e\n', abs(I1-Iex), abs(I2-Iex))
```

Output

```
Erreurs Trapèze: (N=10) 2.05701e-03 - (N=100) 2.05618e-05
```

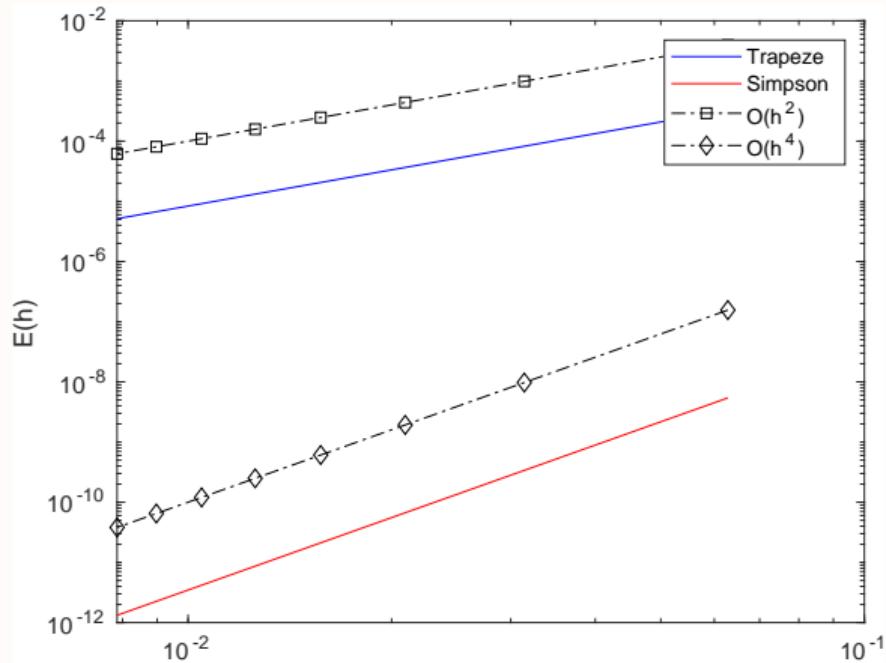
```
Erreurs Simpson: (N=10) 2.11547e-07 - (N=100) 2.11393e-11
```

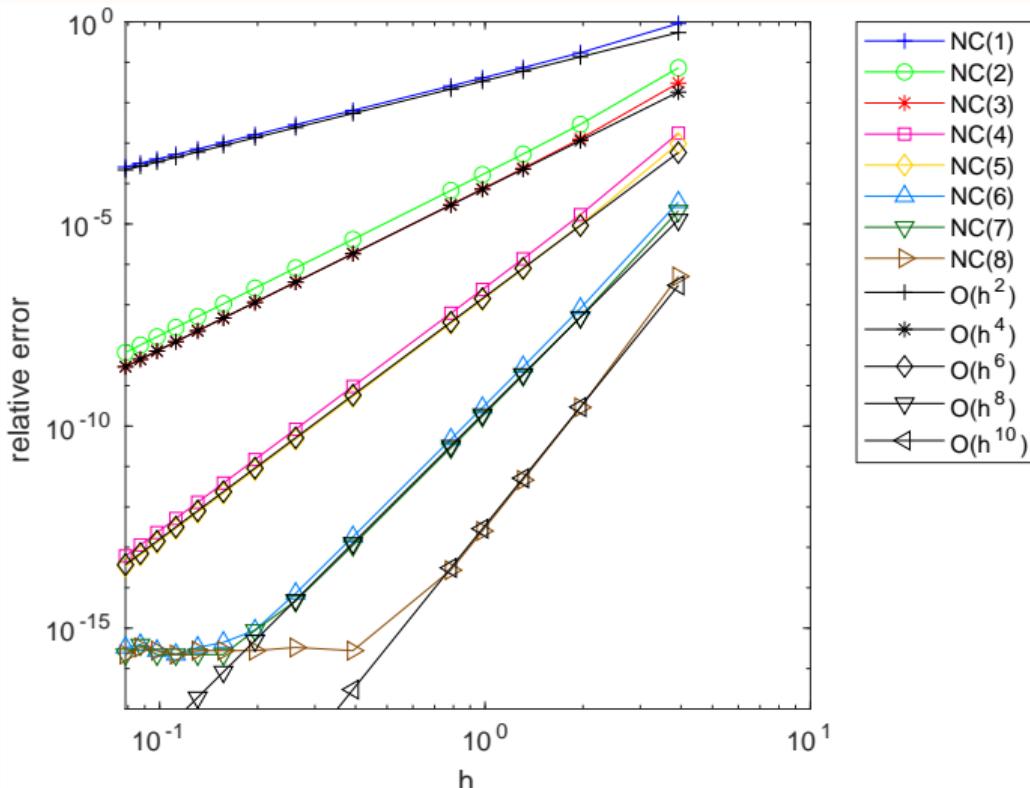
Représenter graphiquement l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

$$E(h) = Ch^p, \implies \log(E(h)) = \log(C) + p \log(h)$$

En échelle logarithmique, $h \mapsto E(h)$ est une droite de pente p

```
f=@(x) cos(x);
F=@(x) sin(x);
a=0;b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a);
LN=25:25:200;
k=1;
for N=LN
    H(k)=(b-a)/N;
    E1(k)=abs(QuadTrapeze(f,a,b,N)-Iex);
    E2(k)=abs(QuadSimpson(f,a,b,N)-Iex);
    k=k+1;
end
loglog(H,E1,'b',H,E2,'r',H,H.^2,'k-.s',...
    H,0.01*H.^4,'k-.d')
xlabel('h');ylabel('E(h)')
legend('Trapeze','Simpson','O(h^2)', 'O(h^4)')
```





Degré d'exactitude (D.E.) de $NC(n)$:

n si n impair, $n + 1$ sinon.

Ordre de convergence de $NC(n)$:

D.E. + 1

Figure: Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de $\int_0^{5\pi/2} \cos(x)dx$, $NC(n)$ correspondant à $Q_{k,n}^{\text{comp}}$ et $h = \frac{5\pi}{2k}$.

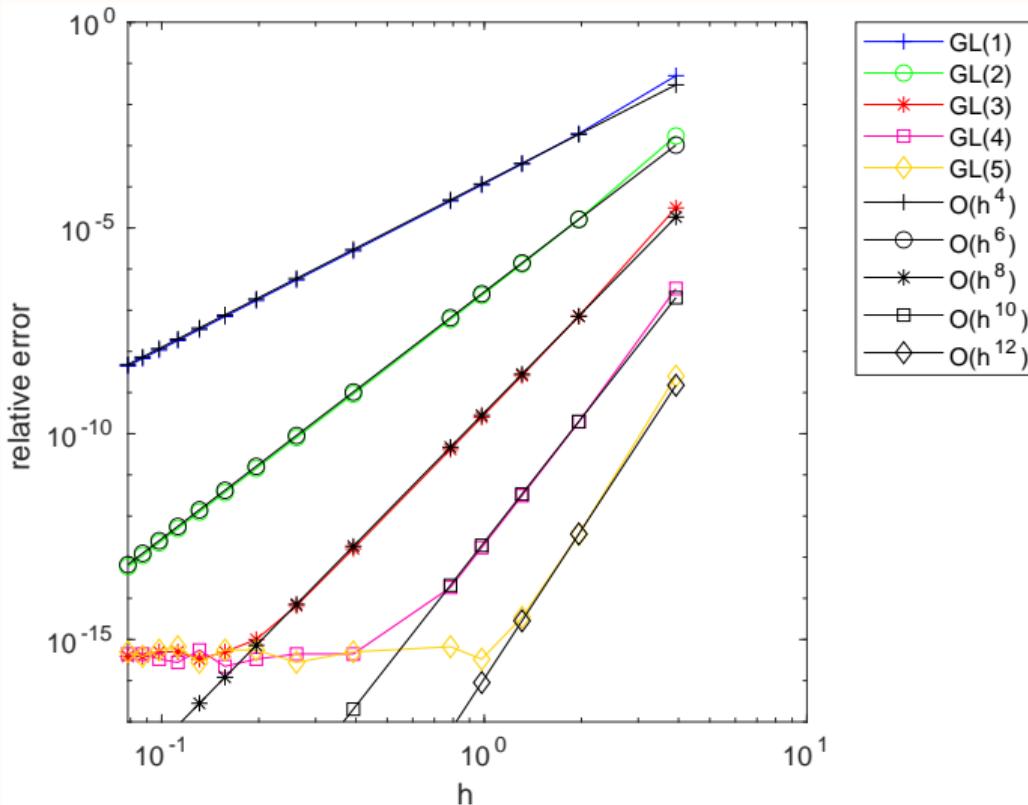


Figure: Erreur des méthodes de Gauss-Legendre composées pour le calcul de $\int_0^{5\pi/2} \cos(x)dx$, GL(n) correspondant à $Q_{k,n}^{\text{comp}}$ et $h = \frac{5\pi}{2k}$.

Degré d'exactitude (D.E.) de GL(n):

$$2n + 1$$

Ordre de convergence de GL(n):

$$\text{D.E.} + 1 = 2n + 2.$$

Soit f une application définie sur $[\alpha, \beta]$, on souhaite approcher

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

par une méthode de quadrature composée de Newton-Cotes. On dispose de la fonction $I \leftarrow \text{QuadElemNC}(f, a, b, n)$ (déjà écrite) retournant une approximation de $\int_a^b f(x) dx$ par la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

Q. 1

Ecrire une fonction algorithmique `QuadCompNC` retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée (k intervalles) de Newton-Cotes (avec localement $n + 1$ points).

Q. 2

Proposer un exemple simple d'utilisation permettant de tester cette fonction.

Q. 3

Proposer un exemple de validation de cette fonction par le degré d'exactitude de la méthode.

Q. 4

Proposer un exemple de validation de cette fonction par l'ordre de convergence de la méthode.

Soit f une application définie sur $[\alpha, \beta]$, on souhaite approcher

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

par une méthode de quadrature composée de Gauss-Legendre.

On dispose de la fonction $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ (déjà écrite) retournant une approximation de $\int_a^b f(x) dx$ par la formule de quadrature élémentaire de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

Q. 5

Ecrire une fonction algorithmique `QuadCompGL` retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée (k intervalles) de Gauss-Legendre (avec localement $n + 1$ points).

Q. 6

Proposer un exemple simple d'utilisation permettant de tester cette fonction.

Q. 7

Proposer un exemple de validation de cette fonction par le degré d'exactitude de la méthode.

Q. 8

Proposer un exemple de validation de cette fonction par l'ordre de convergence de la méthode.

- Il existe un grand nombre d'autres méthodes!
- Intégration en dimensions supérieures?
 - ▶ Sur un orthotope (hyperrectangle), généralisation possible.
 - ▶ Sur un domaine fermé, borné : méthode des éléments finis
 - ▶ Sur une surface ...