

EXERCICE 1

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1

Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire et continue.

R. 1

On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \text{ tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leq C \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| &= |(b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)| \\ &\leq (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| |f(x_j)| \\ &\leq C \|f\|_\infty, \text{ avec } C = (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } f. \end{aligned}$$

Q. 2

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \quad (\text{P-2})$$

R. 2

\Rightarrow Soit $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$, Comme $x \mapsto x^r$ est dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré

inférieur ou égal à k , on en déduit

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket.$$

\Leftarrow Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On peut le décomposer dans la base des monomes: il existe $(a_i)_{i=0}^k$ réels tels que

$$P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i.$$

Par linéarité de l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^i, a, b).$$

Par hypothèse, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket$$

et donc

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \int_a^b x^i dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \int_a^b \sum_{i=0}^k a_i x^i dx = \int_a^b P(x) dx.$$

On en déduit donc que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .

