

### EXERCICE 3

Soient  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  à valeurs réelles,  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x_i)_{i=0}^n$  des points distincts 2 à 2 dans  $[a, b]$ . On souhaite approcher  $\int_a^b f(x)dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ , une formule de quadrature élémentaire,

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels à déterminer.

Q. 1

*Démontrer que (P-1) est de degré d'exactitude  $k$  (au moins) si et seulement si*

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (\text{P-2})$$

R. 1

- $\Rightarrow$  Si la formule (P-1) est de degré d'exactitude  $k$ , elle est donc exacte pour tout polynôme de  $\mathbb{R}_k[X]$  et plus particulièrement pour tous les monômes  $1, X, X^2, \dots, X^k$ . Soit  $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . En prenant  $f(x) = x^r$ , la formule (P-1) étant exacte par hypothèse, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}$$

- $\Leftarrow$  On suppose que l'on a (P-2). Soit  $P \in \mathbb{R}_k[X]$ . On va montrer que la formule de quadrature (P-1) est alors exacte.

Le polynôme  $P$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes de  $\{1, X, X^2, \dots, X^k\}$ , base de  $\mathbb{R}_k[X]$ . On propose ici deux démonstrations.

– **1ère démonstration:** On a donc

$$P(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En prenant  $f = P$ , la formule de quadrature (P-1) donne

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^k \alpha_j x_i^j$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j + 1}$$

et en utilisant (P-2) on obtient

$$\int_a^b P(x) dx = (b - a) \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=0}^n w_i x_i^j$$

Ce qui donne

$$\int_a^b P(x) dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude  $k$ .

– **2ème démonstration:**

On a donc

$$P = \sum_{j=0}^k \alpha_j X^j$$

et par linéarité de l'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$  (voir Proposition 5.1.2) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P, a, b) &= \mathcal{Q}_n\left(\sum_{j=0}^k \alpha_j X^j, a, b\right) \\ &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b). \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a (P-2) et, comme par définition  $X^j$  est le polynôme  $x \mapsto x^j$ , on obtient

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b X^j(x) dx = \int_a^b x^j dx = \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}.$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et donc

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

Q. 2

Les points  $(x_i)_{i=0}^n$  étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (P-1) à  $(n + 1)$  points de degré d'exactitude  $n$  au moins.

R. 2

En fixant les points  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  deux à deux distincts, pour obtenir explicitement la formule de quadrature de type (P-1) il faut déterminer les  $n + 1$  poids  $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ . Or, de (P-2), en prenant  $k = n$ , on obtient exactement  $n + 1$  équations linéaires en les  $(w_i)$  s'écrivant matriciellement sous la forme :

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice intervenant dans le système précédent s'appelle **la matrice de Vandermonde** et elle est inversible (car les  $(x_i)$  sont deux à deux distincts, voir Exercice ??). Ceci établi donc l'existence et l'unicité de poids  $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  tels que la formule de quadrature élémentaire (P-1) soit d'ordre (au moins)  $n$ .

Il est aussi possible de démontrer l'unicité classiquement. Supposons qu'il existe  $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $(\tilde{w}_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  tels que pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on ait

$$\int_a^b P(x) dx = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b - a) \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i P(x_i).$$

On a alors  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) P(x_i) = 0. \tag{R3.1}$$

On rappelle que les fonctions de base de Lagrange associées aux  $(n + 1)$  points  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  notées  $L_i$ , sont dans  $\mathbb{R}_n[X]$  et vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . En choisissant  $P = L_j$  dans (R3.1), on obtient

$$0 = \sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) L_j(x_i) = (w_j - \tilde{w}_j)$$

ce qui prouve l'unicité.

