

EXERCICE 6

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1

Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire.

On note, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

et que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b], \quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (\text{P-2})$$

Q. 2

Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt. \quad (\text{P-3})$$

R. 2

Par le changement de variables $s : t \longrightarrow a + (b - a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x) dx = \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} L_i \circ s(t) s'(t) dt = (b - a) \int_0^1 L_i \circ s(t) dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b - a)t_i$ où $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_i \circ s(t) dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{s(t) - s(t_j)}{s(t_i) - s(t_j)} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(b - a)(t - t_j)}{(b - a)(t_i - t_j)} dt \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt \end{aligned}$$

et on obtient bien (P-3).

Q. 3

a. Montrer que si \mathcal{Q}_n a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b L_i(x) dx. \quad (\text{P-4})$$

b. Montrer que si (P-4) est vérifiée, alors \mathcal{Q}_n a pour degré d'exactitude n au moins.

R. 3

a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i(x) dx.$$

Or comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j L_i(x_j) = (b - a)w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b L_i(x) dx.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (P-3), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x) dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) P(x_i) dx \\ &= \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \\ &= (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = \mathcal{Q}_n(P, a, b). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

Q. 4

On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (P-4). Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (\text{P-5})$$

R. 4

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, on déduit de (P-2) que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \pi_n(x) \right| \\ &\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} |\pi_n(x)| \end{aligned}$$

L'application $f - \mathcal{L}_n(f)$ étant continue sur $[a, b]$, elle est alors intégrable sur $[a, b]$, et l'application $|f - \mathcal{L}_n(f)|$ l'est aussi. De même $|\pi_n(x)|$ est intégrable sur $[a, b]$. On obtient alors

$$\int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| dx \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_n(x)| dx.$$

De plus

$$\left| \int_a^b f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| dx$$

ce qui donne

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx.$$

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins et le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_n(f)$ est de degré n donc on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx &= \mathcal{Q}_n(\mathcal{L}_n(f), a, b) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i \mathcal{L}_n(f)(x_i) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \text{ car } \mathcal{L}_n(f)(x_i) = f(x_i) \\ &= \mathcal{Q}_n(f, a, b) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| &= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx \right| \\ &\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx. \end{aligned}$$

