

References

- [1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, intégration numérique, résumé., 2025. fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_Integration.pdf.

EXERCICE 4

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n + 1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Ecrire une fonction algorithmique **WeightsFromPoints** permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de Proposition 6.4 de [1]. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\mathbf{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Correction Nous avons vu, dans Proposition 6.4 de [1], que pour avoir une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude n , il est nécessaire et suffisant que les $(n + 1)$ poids $(w_i)_{i=0}^n$ soient solution du système linéaire suivant:

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

Algorithme 1 Fonction **WeightsFromPoints** retournant le tableau des poids \mathbf{w} associé à un tableau de points \mathbf{x} donnés (points 2 à 2 distincts) appartenant à un intervalle $[a, b]$.

Données : \mathbf{x} : tableau de \mathbb{R}^{n+1} contenant $(n + 1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention
 $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$
 a, b : deux réels, $a < b$.

Résultat : \mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

```
1: Fonction  $\mathbf{w} \leftarrow \text{WeightsFromPoints}(\mathbf{x}, a, b)$ 
2:    $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{O}_{n+1}$ 
3:    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1, n+1}$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
5:     Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
6:        $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbf{x}(j)^{(i-1)}$ 
7:     Fin Pour
8:      $\mathbf{B}(i) \leftarrow (b^{i-1} - a^{i-1}) / (i * (b - a))$ 
9:   Fin Pour
10:   $\mathbf{w} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ 
11: Fin Fonction
```

