

EXERCICE 9

Q. 1

Ecrire une fonction algorithmique **WeightsPointsNC** retournant les $(n + 1)$ points et les $(n + 1)$ poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points.

R. 1

Algorithme 1 Fonction **WeightsPointsNC** retournant le tableau de points \mathbf{x} donnés correspondant à la discrétisation régulière intervalle $[a, b]$. et le tableau des poids \mathbf{w} associé à un

Données : a, b : deux réels, $a < b$,
 n : $n \in \mathbb{N}^*$.

Résultat : \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$
et $x_{i-1} = a + (i - 1)h$, $h = (b - a)/n$,
 \mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

- 1: **Fonction** $[\mathbf{x}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{WeightsPointsNC}(a, b, n)$
 - 2: $\mathbf{x} \leftarrow a : (b - a)/n : b$
 - 3: $\mathbf{w} \leftarrow \text{WeightsFromPoints}(\mathbf{x}, a, b)$
 - 4: **Fin Fonction**
-

Q. 2

Ecrire une fonction algorithmique **QuadElemNC** retournant la valeur de $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ correspondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points.

R. 2

On a de manière générique l'algorithme suivant:

Algorithme 2 Fonction **QuadElemGen** retourne la valeur de $I = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$.

Données : f : une fonction définie de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ,
 a, b : deux réels avec $a < b$
 \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} contenant $(n + 1)$ points distincts deux à deux
dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention
 $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$
 \mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

Résultat : I : un réel

```
1: Fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemGen}(f, a, b, \mathbf{x}, \mathbf{w})$ 
2:    $I \leftarrow 0$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $\text{Length}(\mathbf{x})$  faire
4:      $I \leftarrow I + \mathbf{w}(i) * f(\mathbf{x}(i))$ 
5:   Fin Pour
6:    $I \leftarrow (b - a) * I$ 
7: Fin Fonction
```

On peut noter que si l'on dispose de la fonction $s \leftarrow \text{Dot}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ correspondant au produit scalaire de deux vecteurs du même espace alors

on a directement

$$I \leftarrow (b - a) * \text{Dot}(\mathbf{w}, f(\mathbf{x})).$$

Algorithme 3 Fonction **QuadElemGen** retourne la valeur de $I = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$ où les poids w_i et les points x_i sont ceux définis par la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes

Données : f : une fonction définie de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ,
 a, b : deux réels avec $a < b$,
 n : $n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : I : un réel

- 1: **Fonction** $I \leftarrow \text{QuadElemNC}(f, a, b, n)$
 - 2: $[\mathbf{x}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{WeightsPointsNC}(a, b, n)$
 - 3: $I \leftarrow \text{QuadElemGen}(f, a, b, \mathbf{x}, \mathbf{w})$
 - 4: **Fin Fonction**
-

