

## EXERCICE 11

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $(n + 1)$  points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $(n + 1)$  points sur  $[-1, 1]$  est donnée par

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

où les  $(t_i)_{i=0}^n$  sont les  $(n + 1)$  racines du polynôme de Legendre  $P_{n+1}(t)$ . Cette formule a pour degré d'exactitude  $2n + 1$ .

Soient  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  et  $\|P\| = \langle P, P \rangle^{1/2}$  la norme associée.

Soit  $M_n$  le polynôme de Legendre normalisé de degré  $(n + 1)$ ,  $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ . On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1

Montrer que

$$c_{n+1}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - c_nM_{n-1}(t), \quad n > 1 \quad (\text{P-1})$$

avec

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2 - 1}}$$

R. 1

Par définition, on a  $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$  et

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(t)P_n(t)dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

On en déduit que

$$M_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n.$$

De plus, par la formule de récurrence de Bonnet, on obtient

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ et } M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t$$

ainsi que,  $\forall n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} (n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}M_{n+1}(t) &= (2n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+1}}tM_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}M_{n-1} \\ &= \sqrt{2(2n+1)}tM_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}M_{n-1} \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par  $\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}$ , on a

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}M_{n-1}$$

Or on a

$$n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}} = c_n$$

et

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}} = c_{n+1}$$

ce qui démontre le résultat voulu.

On définit le vecteur  $\mathbf{M}(t)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par

$$\mathbf{M}(t) = (M_0(t), \dots, M_n(t))^t.$$

Q. 2

*Montrer que l'on a*

$$t\mathbf{M}(t) = \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{P-2})$$

*où l'on explicitera la matrice tridiagonale  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  en fonction des coefficients  $c_1, \dots, c_n$ . Le vecteur  $\mathbf{e}_{n+1}$  étant le  $(n+1)$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

R. 2

On déduit de la question précédente que

$$tM_0(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}t = c_1M_1(t)$$

et

$$tM_i(t) = c_iM_{i-1}(t) + c_{i+1}M_{i+1}(t), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ces  $(n + 1)$  équations peuvent s'écrire matriciellement sous la forme

$$t \begin{pmatrix} M_0(t) \\ M_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) \\ M_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0(t) \\ M_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) \\ M_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n+1}M_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1}.$$

Q. 3

En déduire que les  $(n + 1)$  racines distinctes de  $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$  sont les  $(n + 1)$  valeurs propres de  $\mathbb{A}$ .

R. 3

Le polynôme de Legendre  $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$  admet  $(n + 1)$  racines simples distinctes dans  $] - 1, 1[$  notées  $(t_i)_{i=0}^n$ . (voir rappels) Donc le polynôme de Legendre normalisé  $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$  a les mêmes racines et on déduit de la question précédente que

$$\mathbb{A}\mathbf{M}(t_i) = t_i\mathbf{M}(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Comme les  $(n + 1)$  racines de  $P_{n+1}$  séparent strictement les  $n$  racines de  $P_n$  (voir rappels), alors  $P_n(t_i) \neq 0$  et donc  $M_n(t_i) \neq 0$ . On en déduit que le vecteur  $\mathbf{M}(t_i)$  est non nul et,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, (t_i, \mathbf{M}(t_i)) \text{ est un mode propre de } \mathbb{A}.$$

On peut noter que  $\mathbb{A}$  est symétrique et donc ses valeurs propres sont réelles.

Les  $(n + 1)$  valeurs propres de la matrice  $\mathbb{A}$  sont les  $(n + 1)$  racines de  $P_{n+1}$ , et donc les  $(n + 1)$  points de la formule de quadrature de Gauss-Legendre.

Q. 4

Montrer que

$$2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad (\text{P-3})$$

où  $\delta_{i,j} = 0$ , si  $i \neq j$  et  $\delta_{i,i} = 1$ .

R. 4

Par construction, on a

$$\int_{-1}^1 M_i(t) M_j(t) dx = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

On a  $M_i \in \mathbb{R}_i[X]$  et  $M_j \in \mathbb{R}_j[X]$ , ce qui donne  $M_i M_j \in \mathbb{R}_{i+j}[X]$  avec  $i + j \leq 2n$ . Or la formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $(n + 1)$  points a pour degré d'exactitude  $2n + 1$ , elle est donc exacte pour le polynôme  $M_i M_j$ . On en déduit alors

$$\delta_{i,j} = \int_{-1}^1 M_i(t) M_j(t) dt = 2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k), \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

On note  $W \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice diagonale, de diagonale  $(w_0, \dots, w_n)$  et  $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $P_{i+1,j+1} = M_j(t_i)$ ,  $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

Q. 5

- a. Montrer que  $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ .
- b. En déduire que  $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$ .
- c. En déduire que  $\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (\mathbb{M}_k(t_i))^2$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

R. 5

- a. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ , on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} (\mathbb{P}^t)_{i,k} (\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i} (\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} \end{aligned}$$

et, comme  $\mathbb{W}$  est diagonale,

$$(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} = \sum_{l=1}^{n+1} \mathbb{W}_{k,l} \mathbb{P}_{l,j} = \mathbb{W}_{k,k} \mathbb{P}_{k,j}.$$

On obtient donc

$$(\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i} \mathbb{W}_{k,k} \mathbb{P}_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} w_{k-1} \mathbb{M}_{i-1}(t_{k-1}) \mathbb{M}_{j-1}(t_{k-1}).$$

En utilisant la relation démontré dans la question précédente, on a

$$(\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})_{i,j} = \frac{1}{2} \delta_{i-1,j-1} = \frac{1}{2} \delta_{i,j}$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \frac{1}{2} \mathbb{I}$$

et on en déduit que  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{W}$  sont inversibles .

b. A partir de  $\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \frac{1}{2} \mathbb{I}$ , on déduit

$$2\mathbb{I} = (\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})^{-1} = 2\mathbb{I} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{W}^{-1} (\mathbb{P}^t)^{-1}$$

En multipliant par  $\mathbb{P}$  à gauche et par  $\mathbb{P}^t$  à droite, on obtient

$$\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P} \mathbb{P}^t.$$

c. Comme la matrice  $\mathbb{W}$  est diagonale inversible, son inverse est diagonale et on a

$$(\mathbb{W}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{W}_{i,i}} = \frac{1}{w_{i-1}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{w_{i-1}} &= 2(\mathbb{P}\mathbb{P}^t)_{i,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}(\mathbb{P}^t)_{j,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}^2 \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (\mathbb{M}_k(t_{i-1}))^2, \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.\end{aligned}$$

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** `eig`( $\mathbb{A}$ ) retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Q. 6

- Ecrire la fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$  retournant le tableau des points  $\mathbf{t}$  et le tableau des poids  $\mathbf{w}$  en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.
- Ecrire la fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$  retournant une approximation de  $\int_a^b f(x)dx$  en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $(n+1)$  points sur l'intervalle  $[a, b]$ .

R. 6

- Les  $(n+1)$  points  $(t_i)_{i=0}^n$  de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur  $[-1, 1]$ , sont les racines du polynôme de Legendre



$P_{n+1}$  de degré  $n + 1$ . Pour les calculer, on va utiliser le fait que ce sont les valeurs propres de la matrice symétrique  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2-1}}$ ,  $\forall k \geq 1$ .

Pour calculer les poids  $(w_i)_{i=0}^n$ , on va utiliser la formule

$$\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_i))^2, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

conjointement avec la formule de récurrence

$$M_k(t) = \frac{1}{c_k} (tM_{k-1}(t) - c_{k-1}M_{k-2}(t)), \quad k \geq 2, \quad \text{avec } M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

---

**Algorithme 1** Fonction **GaussLegendre** retournant le tableau des points  $\mathbf{t}$  et le tableau des poids  $\mathbf{w}$

---

**Données :**  $n$  :  $n \in \mathbb{N}$

**Résultat :**  $\mathbf{t}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\mathbf{t}(i) = t_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

$\mathbf{w}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

```
1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ 
2:    $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{O}_n$ 
3:    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1, n+1}$ 
4:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:      $\mathbf{c}(k) \leftarrow \text{sqrt}(k^2 / (4 * k^2 - 1))$ 
6:      $\mathbb{A}(k, k+1) \leftarrow \mathbf{c}(k)$ 
7:      $\mathbb{A}(k+1, k) \leftarrow \mathbf{c}(k)$ 
8:   Fin Pour
9:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{eig}(\mathbb{A})$ 
10:  Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
11:     $M0 \leftarrow \text{sqrt}(1/2)$ 
12:     $M1 \leftarrow \text{sqrt}(3/2) * \mathbf{t}(i)$ 
13:     $S \leftarrow M0^2 + M1^2$ 
14:    Pour  $k \leftarrow 2$  à  $n$  faire
15:       $M \leftarrow (1/\mathbf{c}(k)) * (M1 * \mathbf{t}(i) - \mathbf{c}(k-1) * M0)$ 
16:       $S \leftarrow S + M^2$ 
17:       $M0 \leftarrow M1$ 
18:       $M1 \leftarrow M$ 
19:    Fin Pour
20:     $w(i) \leftarrow 1/(2 * S)$ 
21:  Fin Pour
```

b. On va utiliser la formule

$$I = (b - a) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

avec  $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$  où les points  $(t_i)_{i=0}^n$  et les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  sont ceux de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur  $[-1, 1]$ .

---

**Algorithme 2** Fonction **QuadElemGaussLegendre** retournant une approximation de  $\int_a^b f(x)dx$  en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à  $n + 1$  points sur l'intervalle  $[a, b]$ .

---

**Données :**  $f$  : une fonction de  $[a, b]$  à valeurs réels  
 $a, b$  : deux réels avec  $a < b$   
 $n$  :  $n \in \mathbb{N}$

**Résultat :**  $I$  : un réel

```
1: Fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ 
2:    $[t, w] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ 
3:    $I \leftarrow 0$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
5:      $I \leftarrow I + w(i) * f((a + b)/2 + (b - a)/2 * t(i))$ 
6:   Fin Pour
7:    $I \leftarrow (b - a) * I$ 
8: Fin Fonction
```

---

