

Théorème. Soient $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition ??.
Alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \int_a^b \pi_n(x)^2 dx \quad (\text{P-1})$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

Proof. On va utiliser \mathcal{H}_n , le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite aux $(n+1)$ points de la quadrature. D'après le Théorème ?? (chapitre *Interpolation*), c'est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$ vérifiant

$$\mathcal{H}_n(x_i) = f(x_i) \text{ et } \mathcal{H}'_n(x_i) = f'(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

La fonction f étant dans $\mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$, on peut appliquer le Théorème ?? (chapitre *Interpolation*) et pour tout $x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - \mathcal{H}_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2.$$

Ensuite on intègre cette relation:

$$\int_a^b (f(x) - \mathcal{H}_n(x)) dx = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 dx.$$

Le polynôme \mathcal{H}_n étant de degré $2n + 1$, la formule de quadrature est donc exacte et on a:

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathcal{H}_n(x) dx &= \mathcal{Q}_n(\mathcal{H}_n, a, b) \\ &= (b - a) \sum_{i=0}^n w_i \mathcal{H}_n(x_i) \\ &= (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \\ &= \mathcal{Q}_n(f, a, b).\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} (\pi_n(x))^2 dx.$$

Ce qui donne

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n+2)!} \int_a^b \pi_n(x)^2 dx.$$

□

