

EXERCICE 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n + 1)$ couples de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{P-1})$$

b. Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

R. 1

a. De (P-1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C , on utilise (P-1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{R1.1})$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (P-1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n + 1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

- b. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Pour que les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ $n + 1$ scalaires. Montrons pour cela que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.

On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $x = x_k$, on a par (P-1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \iff \lambda_k = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont donc linéairement indépendants.

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (\text{P-2})$$

Q. 2

Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

R. 2

Par construction $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket^a$,

$$\begin{aligned} P_n(x_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n y_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \delta_{i,j} \text{ par (P-1)} \\ &= y_j. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note P_a et P_b deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (P-1). Le polynôme $Q = P_a - P_b$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ et il vérifie, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$Q(x_i) = P_a(x_i) - P_b(x_i) = 0.$$

Les $n + 1$ points x_i étant distincts, ce sont donc $n + 1$ racines distinctes du polynôme Q . Or tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes^b. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus n admettant $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nulle et donc $P_a = P_b$.

- c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (P-2) car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est unique.

^aA noter le choix de l'indice j . Que doit-on faire dans ce qui suit si l'on choisi i comme indice?

^bLe théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines complexes qui ne sont pas nécessairement distinctes

