

## EXERCICE 10

Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ .

**Q. 1** Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$  et  $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$  avec  $\delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$ .

a. On suppose que  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , (i.e.  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  colinéaires). Exprimer  $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mathbf{b}$ .

b. Que peut-on dire si  $\mathbf{a}$  est nul?

**R. 1**

a. On a

$$\|\mathbf{a}\|_2 = |\lambda| \|\mathbf{b}\|_2 = |\lambda|$$

et

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \lambda.$$

On rappelle que  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = \overline{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$  et,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$ . On a alors

$$\begin{aligned} \arg(\alpha) &= -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\lambda) + \delta\pi. \end{aligned}$$

On a alors

- avec  $\delta = 0$ ,

$$\alpha = |\alpha|e^{i\arg(\alpha)} = |\lambda|e^{i\arg(\lambda)} = \lambda$$

ce qui donne

$$\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

- avec  $\delta = 1$ ,

$$\alpha = |\alpha|e^{i\arg(\alpha)} = |\lambda|e^{i(\arg(\lambda)+\pi)} = -\lambda$$

$$\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} = 2\lambda \mathbf{b}.$$

b. Si  $\mathbf{a}$  est nul, on a  $\alpha = 0$  et  $\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Q. 2

Ecrire la fonction algorithmique **MatHouseholder** de paramètres  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$  retournant une matrice  $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  unitaire et  $\alpha \in \mathbb{C}$  telles que

- si  $\mathbf{a} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = \mathbf{0}$  (i.e.  $\mathbf{a}$  nul ou colinéaire à  $\mathbf{b}$ ) alors  $\mathbb{S}$  est la matrice identité et  $\alpha = 0$ ,
- sinon  $\alpha$  est le nombre complexe défini en **Q. 1** (dépendant de  $\delta$ ) et  $\mathbb{S}$  est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H} \left( \frac{\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}\|_2} \right)$$

telle que  $\mathbb{S}\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ .

Des fonctions comme **dot**( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ) (produit scalaire de deux vecteurs), **norm**( $\mathbf{a}$ ) (norme 2 d'un vecteur), **arg**( $z$ ) (argument d'un nombre complexe), **eye**( $n$ ) (matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ), **matprod**( $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ) (produit de deux matrices), **ctranspose**( $\mathbb{A}$ ) (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées



---

**Algorithme 1** fonction  $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta)$ .

---

Retourne une matrice  $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  unitaire et  $\alpha \in \mathbb{C}$  telles que

- si  $\mathbf{a} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = 0$  (i.e.  $\mathbf{a}$  nul ou colinéaire à  $\mathbf{b}$ ) alors  $\mathbb{S}$  est la matrice identité et  $\alpha = 0$ ,
- sinon  $\alpha$  est le nombre complexe défini par

$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg(\alpha) = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi,$$

et,  $\mathbb{S}$  est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H} \left( \frac{\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}\|_2} \right)$$

telle que  $\mathbb{S}\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ .

**Données :**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  : deux vecteurs de  $\mathbb{C}^n$  non nuls et non colinéaires.

$\delta$  : 0 ou 1, permet de déterminer  $\alpha$ .

**Résultat :**  $\mathbb{S}$  : matrice de Householder ou identité dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$\alpha$  : nombre complexe, de module  $\|\mathbf{a}\|_2$  et d'argument  $-\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ .

1: **Fonction**  $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta)$

2:  $\text{ba} \leftarrow \text{dot}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$

$\triangleright \text{dot}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) : \mathbf{b}^* \mathbf{a}$

3: **Si**  $\text{norm}(\mathbf{a} - \text{ba} * \mathbf{b}) < 1e - 15$  **alors**

4:  $\mathbb{S} \leftarrow \text{eye}(n), \alpha \leftarrow 0$

5: **Sinon**

6:  $\alpha \leftarrow \text{norm}(\mathbf{a}) * \exp(i * (\delta * \pi + \arg(\text{ba})))$

7:  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}$

8:  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} / \text{norm}(\mathbf{u})$

9:  $\mathbb{S} \leftarrow \text{eye}(n) - 2 * \text{matprod}(\mathbf{u}, \text{ctranspose}(\mathbf{u}))$

10: **Fin Si**

11: **Fin Fonction**

---

Q. 3

Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction `vecrand(n)` retournant un vecteur aléatoire de  $\mathbb{C}^n$ , les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans  $]0, 1[$  (loi uniforme).

R. 3

```

1:  $n \leftarrow 100$ 
2:  $\mathbf{a} \leftarrow \text{vecrand}(n)$ 
3:  $\mathbf{b} \leftarrow \text{vecrand}(n)$ 
4:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{norm}(\mathbf{b}, 2)$ 
5:  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$ 
6:  $\text{error} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H} * \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}, 2)$ 

```

Q. 4

Proposer un programme permettant de vérifier que  $\delta = 1$  est le "meilleur" choix.

R. 4

Ici, l'objectif est d'illustrer le fait qu'avec  $\mathbf{a}$  presque colinéaire à  $\mathbf{b}$ , on a (voir Q. 1)

- si  $\delta = 1$ , alors  $\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \approx 2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b}$
- si  $\delta = 0$ , alors  $\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \approx \mathbf{0}$  et ceci est source d'ennuis numériques (précision machine) lors du calcul du vecteur

$$\frac{\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}\|_2}.$$

```

1:  $n \leftarrow 100$ 
2:  $\mathbf{b} \leftarrow \text{vecrand}(n)$ 
3:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{norm}(\mathbf{b}, 2)$ 
4:  $\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{b} + \text{tol} * \text{vecrand}(n)$ 
5:  $[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{MatHouseholder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1)$ 
6:  $[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{MatHouseholder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$ 

```

```

7: error0  $\leftarrow$  norm( $\mathbb{H}_0 * \mathbf{a} - \alpha_0 * \mathbf{b}, 2$ )/(1 + abs( $\alpha_0$ ))
8: error1  $\leftarrow$  norm( $\mathbb{H}_1 * \mathbf{a} - \alpha_1 * \mathbf{b}, 2$ )/(1 + abs( $\alpha_1$ ))

```

Dans la figure qui suit, on représente en échelle logarithmique, et, en fonction de l'ordre des matrices, l'erreur obtenue avec  $\delta = 1$ ,  $\delta = 0$  et  $\text{tol} = 1e - 12$  lors de l'utilisation de la fonction `MatHouseholder` avec un vecteur  $\mathbf{a}$  presque colinéaire à  $\mathbf{b}$ . En Figure 2, la représentation est faite avec  $\text{tol} = 1e - 6$ .

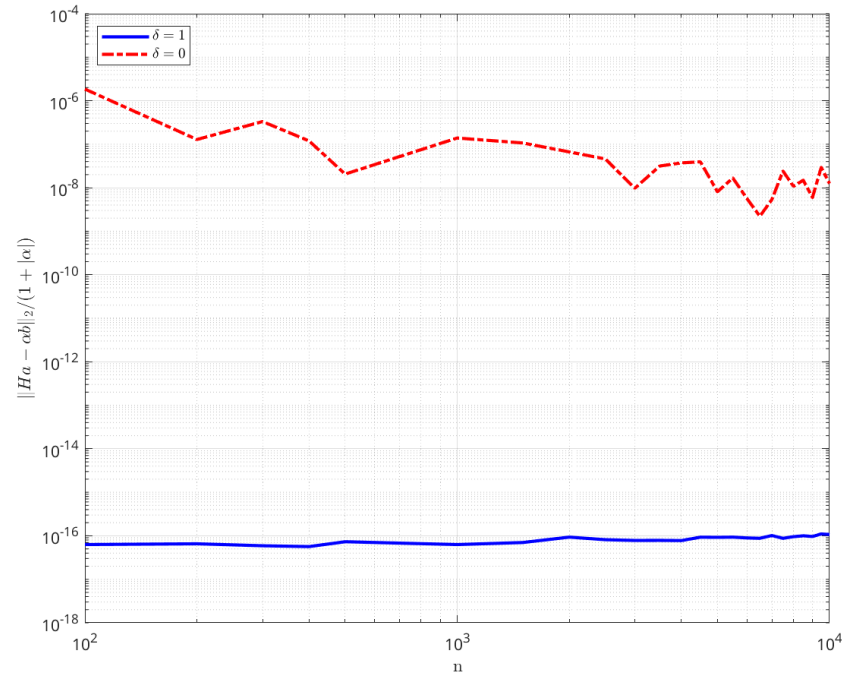


Figure 1: Choix de  $\alpha$  dans `MatHouseholder` : erreur relative en norme  $L_2$  avec  $\text{tol} = 1e - 12$

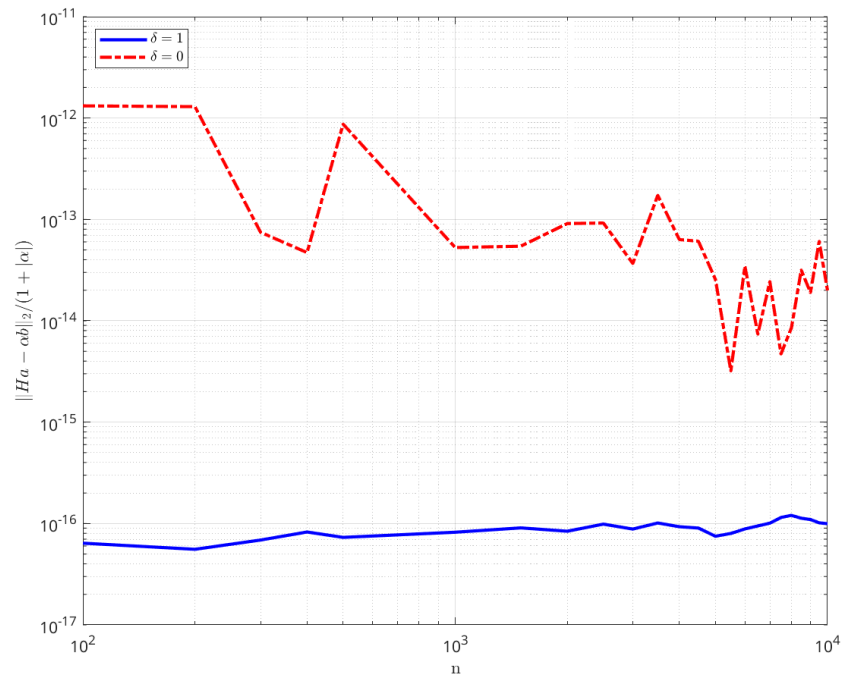


Figure 2: Choix de  $\alpha$  dans **MatHouseholder** : erreur relative en norme  $L_2$  avec  $\text{tol} = 1e - 6$



## References

- [1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, [https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume\\_RSLdirecte.pdf](https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf).
- [2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.