

### Théorème : *Convergence locale de la méthode du point fixe*

Soit  $\alpha$  un point fixe d'une fonction  $\Phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $\alpha$ .

Si  $|\Phi'(\alpha)| < 1$ , alors il existe  $\delta > 0$  pour lequel  $x_k$  converge vers  $\alpha$  pour tout  $x_0$  tel que  $|x_0 - \alpha| \leq \delta$ . De plus, si  $x_0 \neq \alpha$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \quad (\text{P-1})$$

si  $\Phi'(\alpha) \neq 0$ , la convergence est d'ordre 1 (exactement).

*Proof.* On va construire un intervalle fermé borné, noté  $\mathcal{V}$ , pour lequel les hypothèses du Théorème 1.4 sont vérifiées. Comme  $\Phi'$  est continue dans un voisinage de  $\alpha$  avec  $|\Phi'(\alpha)| < 1$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ On note  $(\mathcal{P})$  la proposition (avec les hypothèses sur  $\Phi$  de l'énoncé)

$$(\mathcal{P}) : \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

On va démontrer  $(\mathcal{P})$  par l'absurde en supposant non  $(\mathcal{P})$ , c'est à dire

$$\forall \delta > 0, \exists x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta], \text{ tel que } |\Phi'(x)| \geq 1.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note par exemple  $\delta_n = 1/n$ . Alors on a

$$\exists x_n \in [\alpha - \delta_n, \alpha + \delta_n], \text{ tel que } |\Phi'(x_n)| \geq 1.$$

Comme  $\alpha - 1/n \leq x_n \leq \alpha + 1/n$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\alpha$ . Par continuité de  $x \mapsto |\Phi'(x)|$  et comme  $|\Phi'(x_n)| \geq 1$ , on déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi'(x_n)| = |\Phi'(\alpha)| \geq 1$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $|\Phi'(\alpha)| < 1$ .

□

On note  $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ,

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

Comme l'intervalle  $\mathcal{V}$  est un fermé et que l'application  $|\Phi'|$  est continue sa borne supérieure est atteinte dans  $\mathcal{V}$  :

$$\exists \bar{x} \in \mathcal{V} \text{ tel que } |\Phi'(\bar{x})| = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\Phi'(x)|.$$

On a donc  $L = |\Phi'(\bar{x})| < 1$ .

Montrons que  $\Phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ . En effet, d'après la formule de Taylor-Lagrange:

$\forall x \in \mathcal{V}, \exists \xi \in ]\min(x, \alpha), \max(x, \alpha)[ \subset \mathcal{V}$  tel que

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha) + (x - \alpha)\Phi'(\xi).$$

On en déduit

$$|\Phi(x) - \Phi(\alpha)| = |x - \alpha| |\Phi'(\xi)| \leq \delta |\Phi'(\xi)| \leq \delta$$

Comme  $\Phi(\alpha) = \alpha$ , on obtient  $|\Phi(x) - \alpha| \leq \delta$  i.e.  $\Phi(x) \in \mathcal{V}$ .

On peut donc appliquer le Théorème 1.4 avec  $[a, b] = \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$  ce qui permet de conclure. □

