

## EXERCICE 1

On suppose que la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , vérifie  $f(a)f(b) < 0$  et qu'il existe un unique  $\alpha \in ]a, b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . On définit les trois suites  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par

- $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ,
- $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, \ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, \ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1

- a. Montrer que les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  convergent vers  $\alpha$ .
- b. En déduire que la suite  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$ .

R. 1

- a. Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f(x_k) = 0$ , (i.e.  $x_k = \alpha$  car  $x_k \in [a, b]$ ) alors par construction  $a_{k+i} = b_{k+i} = x_{k+i} = \alpha$  pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ . Ceci assure la convergence des 3 suites vers  $\alpha$ .

Supposons maintenant que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_k) \neq 0$ . Par construction, nous avons  $a_k \leq a_{k+1} \leq b$ ,  $a \leq b_{k+1} \leq b_k$  et  $a_k \leq b_k$ . La suite  $(a_k)$  est convergente car elle est croissante et majorée. La suite  $(b_k)$  est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus  $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$  et donc  $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b-a}{2^k}$ . On en déduit que les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  ont même limite. Comme par construction,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_k, b_k]$  ceci entraîne que  $\alpha$  est la limite de ces 2 suites.

- b. Par construction,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \leq x_k \leq b_k$ . D'après le théorème des gendarmes, les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  convergeant vers  $\alpha$ , on obtient la convergence de la suite  $(x_k)$  vers  $\alpha$ .

Q. 2

a. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$ .

b. Soit  $\epsilon > 0$ . En déduire que si  $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$  alors  $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$ .

R. 2

a. On a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  et  $a_k \leq \alpha \leq b_k$  d'où  $|x_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$ . Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

b. Pour avoir  $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$ , il suffit d'avoir  $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \epsilon$ , et la fonction  $\log$  étant croissante on obtient

$$k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

