

EXERCICE 5

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$ ou \mathbb{R}) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.

Soit $x_0 \in I$ tel que $\Phi(x_0) \neq x_0$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{P-1})$$

Q. 1 Montrer que la suite (P-1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

R. 1 La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (P-1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, connaissant x_0 .

Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, car il faut pouvoir calculer $\Phi(x_k)$.

C'est bien sur immédiat par récurrence car $\Phi(I) \subset I$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in I$.
- Hérédité: on suppose $x_k \in I$, montrons que $x_{k+1} \in I$. Par définition, $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\Phi(I) \subset I$, on a $x_{k+1} \in I$.

On va démontrer que la suite (P-1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (\text{P-2})$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|. \quad (\text{P-3})$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq 2, \quad |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (\text{P-4})$$

R. 2

a. La fonction Φ étant contractante sur I , on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[\text{ t.q. } \forall (x, y) \in I^2, \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|.$$

On obtient alors

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k) : \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: (\mathcal{P}_0) est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que (\mathcal{P}_k) est vérifiée. Montrons que (\mathcal{P}_{k+1}) est vraie. On a, en utilisant (P-1) et l'hypothèse de contraction sur Φ ,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leq L|x_{k+1} - x_k|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq LL^k |x_1 - x_0|$$

et donc (\mathcal{P}_{k+1}) est vraie.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. On va montrer, par récurrence la proposition

$$(\mathcal{Q}_l) : \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$.

- Initialisation: (\mathcal{Q}_0) est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $l \in \mathbb{N}$, on suppose que (\mathcal{Q}_l) est vérifiée. Montrons que (\mathcal{Q}_{l+1}) est vraie.
Comme Φ est contractante, on a

$$|x_{k+l+1} - x_{k+l}| = |\Phi(x_{k+l}) - \Phi(x_{k+l-1})| \leq L|x_{k+l} - x_{k+l-1}|.$$

En utilisant, l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+l+1} - x_{k+l}| \leq LL^l|x_k - x_{k-1}| = L^{l+1}|x_k - x_{k-1}|.$$

La proposition (\mathcal{Q}_{l+1}) est donc vraie.

- Conclusion: on démontré par récurrence que (\mathcal{Q}_l) est vraie pour tout $l \in \mathbb{N}$.

c. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$. On a

$$|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right|.$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}|$$

En utilisant (P-3), on obtient alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k|.$$

En utilisant (P-2), on obtient alors (P-4).

Q. 3

- a. Dédurre de la question précédente que la suite (P-1) est une suite de Cauchy.
- b. Montrer que la suite (P-1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.
- c. Montrer l'unicité du point fixe.

R. 3

- a. On a $0 \leq L < 1$, et donc $L^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. De (P-4), on déduit alors que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

On propose toutefois une démonstration détaillée.

Pour que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on déduit de (P-4) en utilisant (P-2)

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$ et $x_1 = \Phi(x_0) \neq x_0$

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction \ln étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln \left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|} \right).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln \left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|} \right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

- b. La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} espace complet donc elle converge dans \mathbb{R} vers un point que l'on nomme β . De plus pour tout k , x_k appartient à I fermé, donc sa limite β appartient aussi à I .

La fonction Φ étant contractante sur I , elle est donc continue sur I . On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$|x_{k+1} - \beta| = |\Phi(x_k) - \Phi(\beta)| \leq L|x_k - \beta|.$$

Comme $0 \leq L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

- c. On suppose qu'il existe β_1 et β_2 dans $[a, b]$ tels que $\Phi(\beta_1) = \beta_1$ et $\Phi(\beta_2) = \beta_2$. Dans ce cas on a

$$|\beta_1 - \beta_2| = |\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)| \leq L|\beta_1 - \beta_2|.$$

On en déduit

$$(1 - L)|\beta_1 - \beta_2| \leq 0$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\beta_1 = \beta_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.

