

EXERCICE 6

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a) \neq f(b)$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1

Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (\text{P-1})$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

R. 1

Si $\lambda > 0$, l'inéquation (P-1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x-b) \leq f(x) \leq \lambda(x-a) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b. \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (P-1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x-a) \leq f(x) \leq \lambda(x-b) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b. \end{aligned}$$

Q. 2

Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (\text{P-2})$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

R. 2

Si $\lambda > 0$, l'inéquation (P-2) devient

$$\begin{aligned}
0 < f'(x) < 2\lambda &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\
&\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1.
\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (P-2) devient

$$\begin{aligned}
2\lambda < f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\
&\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1.
\end{aligned}$$

On se place sous les conditions (P-1) et (P-2).

Soit $x_0 \in [a, b]$ donné et on note

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Q. 3

Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$ à l'ordre 1 au moins.

R. 3

Sous les hypothèses (P-1) et (P-2) on a $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et $\forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| < 1$. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, un fermé borné, la fonction Φ l'est aussi et on a alors:

$$\exists L < 1, \text{ tel que, } \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L.$$

Les hypothèses du Théorème du point fixe (application \mathcal{C}^1) sont vérifiées, et donc

- comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, la suite (x_k) est bien définie,
- la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$,
- la suite (x_k) converge vers ce point fixe à l'ordre 1 au moins.

Comme $\Phi(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{\lambda}$ et $\Phi(\alpha) = \alpha$, on obtient $f(\alpha) = 0$.

L'unicité de la racine est immédiate. Supposons qu'il existe $\beta \in [a, b]$, tel que $f(\beta) = 0$. Dans ce cas on a $\Phi(\beta) = \beta - \frac{f(\beta)}{\lambda} = \beta$, et β est un point fixe de Φ or celui-ci est unique, donc $\beta = \alpha$.

Q. 4

En justifiant, sous quelle(s) condition(s) sur f a-t-on

- la convergence à l'ordre 1 exactement?*
- la convergence à l'ordre 2 au moins?*
- la convergence à l'ordre 2 exactement?*

R. 4

- D'après le théorème de convergence locale du point fixe, la convergence est d'ordre 1 exactement si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, c'est à dire

$$f'(\alpha) \neq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Comme D'après la proposition sur l'ordre $p + 1$ de convergence, avec $p = 1$, il faut que la fonction $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage \mathcal{V} de α et que $\Phi^{(1)}(\alpha) = 0$ pour que la convergence soit d'ordre 2 au moins, c'est à dire

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V}) \text{ et } f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- De cette même proposition, il faut que la convergence soit d'ordre 2 au moins, et, si $\Phi^{(2)}(\alpha) \neq 0$, c'est à dire $f^{(2)}(\alpha) \neq 0$, alors la convergence est d'ordre 2 (exactement).

