

## EXERCICE 6

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $I = ]\alpha_-, \alpha_+[$  un voisinage de  $\alpha$  et  $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$ . On suppose que  $\alpha$  est un point fixe de  $\phi$  tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 1

- a. Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ,  $|\phi'(x)| < 1$ .
- b. Montrer que  $\phi$  est contractante sur  $\mathcal{V}$  et que  $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ .
- c. Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b, permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers  $\alpha$  au moins à l'ordre 1.

R. 1

- a. Puisque  $\phi'$  est continue et que  $|\phi'(\alpha)| < 1$ , il existe  $\delta > 0$  et un intervalle fermé  $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset ]\alpha_-, \alpha_+[$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{V}$ ,  $|\phi'(x)| < 1$ .

On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ Comme  $\phi'$  est continue en  $\alpha$ , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \left( |x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| < \varepsilon \right).$$

On note  $M = \phi'(\alpha)$  et on prend  $\varepsilon = 1 - |M|$  qui est strictement positif car  $0 \geq |M| = |\phi'(\alpha)| < 1$ . Dans ce cas, il existe  $\beta > 0$  tel que  $]\alpha - \beta, \alpha + \beta[ \subset I$  et

$$\forall x \in I, \left( |x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - M| < 1 - |M| \right).$$

Soit  $x \in I$  tel que  $|x - \alpha| < \beta$ , c'est à dire  $x \in ]\alpha - \beta, \alpha + \beta[$ , alors on a

$$\begin{aligned} |\phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow -1 + |M| < \phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow -1 + M + |M| < \phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$

Comme  $-|M| \leq M \leq |M|$ , on a  $M + |M| \geq 0$  et  $M - |M| \leq 0$ , ce qui entraine

$$|\phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow -1 < \phi'(x) < 1.$$

On a donc,

$$\forall x \in ]\alpha - \beta, \alpha + \beta[, |\phi'(x)| < 1.$$

En posant  $\delta = \beta/2$  (par ex.), on obtient, en définissant  $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ,

$$\forall x \in \mathcal{V}, |\phi'(x)| < 1.$$

□

b. On pose

$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$

Comme  $\mathcal{V}$  est fermé,  $L < 1$ . Soient  $(x, y) \in \mathcal{V}^2$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi \in ]x, y[ \subset \mathcal{V}$  telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque  $|\phi'(\xi)| \leq L$ , on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|,$$

ce qui signifie  $\phi$  est contractante sur  $\mathcal{V}$ . De plus, si  $x \in \mathcal{V}$ , en utilisant la formule précédente avec  $y = \alpha \in \mathcal{V}$ , on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leq L|x - \alpha| < |x - \alpha| \leq \delta,$$

et donc  $\phi(x) \in \mathcal{V}$ . Ainsi on a  $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ .

c. Voici le théorème du cours:

**Théorème : Théorème du point fixe dans  $\mathbb{R}$ , application contractante**

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle fermé, non vide, et  $\Phi$  une application contractante de  $I$  dans lui-même. Alors, il existe un unique point  $\alpha \in I$  vérifiant  $\Phi(\alpha) = \alpha$ . Le point  $\alpha$  est appelé **point fixe de la fonction  $\Phi$** . Pour tout  $x_0 \in I$ , la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{R6.1})$$

est bien définie et elle converge vers  $\alpha$  avec un ordre 1 au moins.

Soit  $x_0 \in \mathcal{V}$  et la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2

Montrer que, si  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \quad (\text{P-1})$$

R. 2

Avec  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , d'après Q. 1, la suite définie par  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  converge vers  $\alpha$  à l'ordre 1 au moins. Comme  $\alpha$  est un point fixe de  $\phi$ , i.e.  $\alpha = \phi(\alpha)$  et  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , avec  $x_0 \neq \alpha$ , on a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq \alpha$ . On a donc

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}.$$

Comme la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$  avec  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq \alpha$  et que  $\phi$  est dérivable en  $\alpha$  on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

Q. 3

Supposons maintenant que  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$  et que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre  $p + 1$  au moins.

b. Montrer que, si  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (\text{P-2})$$

c. Que peut-on dire si  $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ ?

R. 3

a. Comme  $\phi'(\alpha) = 0$ , alors (en particulier)  $|\phi'(\alpha)| < 1$ . D'après la question 1, cela signifie que pour tout  $x_0 \in \mathcal{V}$ , la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par l'algorithme du point fixe (R6.1) converge vers  $\alpha$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe  $\xi_k \in ]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$  tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k)$$

c'est à dire

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k). \quad (\text{R6.2})$$

De plus,  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ ,  $\phi^{(p+1)}$  est continue sur  $\mathcal{V}$ , un fermé borné et donc

$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{V}, |\phi^{(p+1)}(x)| \leq C.$$

Comme  $\xi_k \in \mathcal{V}$ , on déduit de (R6.2) que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{C}{(p+1)!} |x_k - \alpha|^{p+1}$$

et donc la convergence est d'ordre  $(p+1)$  au moins.

b. La fonction  $\phi^{(p+1)}$  étant continue et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_k = \alpha$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

Comme  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , on a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq \alpha$  et donc (R6.2) peut s'écrire

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \quad (\text{R6.3})$$

En prenant la limite, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

c. Soit  $\varepsilon > 0$ . En multipliant la valeur absolue de (R6.3) par  $|x_k - \alpha|^{-\varepsilon} \neq 0$ , on obtient

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1+\varepsilon}} = |x_k - \alpha|^{-\varepsilon} \frac{|\phi^{(p+1)}(\xi_k)|}{(p+1)!}$$

Or  $|x - \alpha|^{-\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$ , et  $\phi^{(p+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ , ce qui entraine

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1+\varepsilon}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha|^{-\varepsilon} \frac{|\phi^{(p+1)}(\xi_k)|}{(p+1)!} = +\infty.$$

Donc,  $\forall \varepsilon > 0$ , la convergence n'est pas d'ordre  $p+1+\varepsilon$ . Elle est d'ordre  $(p+1)$  (exactement).

