

EXERCICE 2

Q. 1 Montrer que les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.

R. 1

Par hypothèse, on a

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Si $K = 0$, la fonction f est alors constante et donc uniformément continue.

On suppose maintenant que $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $K|x - y| < \varepsilon$. En posant $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, on a $\delta > 0$ et $\forall (x, y) \in I^2$,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta < \varepsilon.$$

et donc f est uniformément continue sur I .

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$

Q. 2 On suppose que f' est bornée, i.e.

$$\exists L \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } \forall x \in I, |f'(x)| \leq L.$$

Montrer que f est lipschitzienne de rapport L .

R. 2

Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissements finis), il existe $\xi \in]x, y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi)$$

et donc

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

La fonction f est donc L -lipschitzienne.

Q. 3

Soit $L \in \mathbb{R}_+$. On suppose f lipschitzienne de rapport L .
Montrer que f' est bornée.

R. 3

Soient $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$. D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissements finis), il existe $\xi_h \in]\min(x, x + h), \max(x, x + h)[$ tel que

$$f(x + h) - f(x) = hf'(\xi_h)$$

De plus, f étant L -lipschitzienne, on a

$$|f(x + h) - f(x)| \leq L|h|.$$

Comme $h \neq 0$, on en déduit

$$|f'(\xi_h)| \leq L.$$

On a $\xi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x$, et comme f' continue,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(\xi_h) = f'(\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h) = f'(x).$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$|f'(x)| \leq L.$$

