Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Chapitre 6: *Intégration numérique*[1]

References

[1] F. Cuvelier, *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*, Polycopié (téléchargement), 2025.

[2] F. Cuvelier, *Analyse numérique I, intégration numérique, résumé.*, 2025. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_Integration.pdf`.

1 Exercices du cours

Exercice 1

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.*

Q. 2 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si*

$$\forall r \in [\![0,k]\!], \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \tag{1.2}$$

Exercice 2

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{2.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.
On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i). \tag{2.2}$$

Q. 1 *Expliciter φ^{-1}.*

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Q. 2 *Montrer que si $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.*

Q. 3 *Montrer que si $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k.*

[1] auteur: F. Cuvelier. Compilé le 6 décembre 2025 à 6 h 24.

Exercice 3

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire,

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{3.1}$$

où les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels à déterminer.

Q. 1 *Démontrer que* (3.1) *est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{3.2}$$

Q. 2 *Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire* (3.1) *à $(n+1)$ points de degré d'exactitude n au moins.*

Exercice 4

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. Ecrire une fonction algorithmique WeightsFromPoints permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.1.4 [1]/ 6.4 [2]. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\boldsymbol{x} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Exercice 5

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{5.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5.2}$$

Q. 1

a. *Etablir que*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right).$$

b. *Si n est impair, montrer que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i \neq \dfrac{a+b}{2}$.*

c. *Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x_i = \dfrac{a+b}{2}$.*

d. *En justifiant, donner explicitement un exemple de points $(x_i)_{i=0}^n$ vérifiant* (5.2) *(n restant quelconque).*

Q. 2 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.*

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $(2m+1)$ s'écrivant sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3

a. Calculer les dérivées $\mathrm{P}^{(2m+1)}$ *et* $\mathrm{P}^{(2m+2)}$.

b. Montrer que

$$\mathrm{P}(x) = C\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \mathrm{R}(x) \tag{5.3}$$

en déterminant le degré maximum de R *et en exprimant* C *en fonction des* $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

Q. 4

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} dx = 0. \tag{5.4}$$

Q. 5

On suppose que la formule de quadrature élémentaire (5.1) *est exacte pour les polynômes de* $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

a. Déduire de (5.3) *et* (5.4) *que la formule de quadrature élémentaire* (5.1) *est exacte pour* P *si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = 0. \tag{5.5}$$

*b. En utilisant **Q. 1**, démontrer que* (5.5) *est toujours vérifiée.*

Q. 6

Ecrire de manière très précise le résultat démontré.

Exercice 6

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{6.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1

Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ *définie de* $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est linéaire.*

On note, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et $t_i = (x_i - a)/(b-a)$. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

et que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi_x \in [a,b], \quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{6.2}$$

Q. 2

Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt. \tag{6.3}$$

Q. 3

a. Montrer que si $\mathcal{Q}_n$ *a pour degré d'exactitude* n *au moins alors, on a*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx. \tag{6.4}$$

b. Montrer que si (6.4) *est vérifiée, alors* $\mathcal{Q}_n$ *a pour degré d'exactitude* n *au moins.*

Q. 4 *On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (6.4). Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b) \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \tag{6.5}$$

Exercice 7

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in [\![0,n]\!]$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$

Q. 1 *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{L}_i((a+b) - x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

Q. 2 *Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par*

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

Exercice 8

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{8.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.
On suppose que (8.1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.*

Soient π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

et $m \in \mathbb{N}^*$.

rappel division euclidienne: Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$\mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R} \quad \text{et} \quad \deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B}).$$

Dans la division euclidienne de A par B, Q est le quotient et R le reste.

Q. 2

a. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. *Déterminer les degrés maximaux des polynômes* Q *(quotient) et* R *(reste), obtenus par la division euclidienne de* P *par* π_n, *et satisfaisant*

$$\mathrm{P} = \pi_n \mathrm{Q} + \mathrm{R}.$$

b. *En déduire que*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X], \quad \int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx. \tag{8.2}$$

où Q *est le quotient de la division euclidienne de* P *par* π_n,

Q. 3

Démontrer que (8.1) *a pour degré d'exactitude* $(n+m)$ *au moins si et seulement si*

$$\forall \mathrm{H} \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \quad \int_a^b \pi_n(x)\mathrm{H}(x)dx = 0. \tag{8.3}$$

Q. 4

En déduire le degré maximal d'exactitude de (8.1).

Q. 5

Démontrer que (8.1) *a pour degré d'exactitude* $(n+m)$ *au moins si et seulement si*

$$\int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]. \tag{8.4}$$

Exercice 9

Q. 1

Ecrire une fonction algorithmique WeightsPointsNC *retournant les* $(n+1)$ *points et les* $(n+1)$ *poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

Q. 2

Ecrire une fonction algorithmique QuadElemNC *retournant la valeur de* $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ *correpondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à* $(n+1)$ *points.*

Exercice 10

Q. 1

Déterminer les points t_0, t_1 *de l'intervalle* $[-1, 1]$ *et les poids* w_0, w_1 *tel que la formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2

En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ *qui soit de degré d'exactitude* 3.

Exercice 11

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1, 1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1}(t)$. Cette formule à pour degré d'exactitude $2n+1$.
Soient $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|\mathrm{P}\| = \langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle^{1/2}$ la norme associée.
Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1

Montrer que

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{11.1}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \ \textit{et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

On définit le vecteur $\boldsymbol{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t), \ldots, \mathrm{M}_n(t))^t.$$

Q. 2

Montrer que l'on a

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{11.2}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1, \ldots, c_n$. Le vecteur $\boldsymbol{e}_{n+1}$ étant le $(n+1)$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 3

En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.

Q. 4

Montrer que

$$2\sum_{k=0}^{n} w_k \mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k) = \delta_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \tag{11.3}$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0, \ldots, w_n)$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = \mathrm{M}_j(t_i)$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

Q. 5

a. Montrer que $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.

b. En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.

c. En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{M}_k(t_i))^2$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** eig($\mathbb{A}$) retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 6

a. Ecrire la fonction $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow$ GaussLegendre(n) retournant le tableau des points $\boldsymbol{t}$ et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.

b. Ecrire la fonction $I \leftarrow$ QuadElemGaussLegendre(f, a, b, n) retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 12

Ecrire une fonction algorithmique QuadSimpson retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f. On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

2 Exercices supplémentaires

Exercice 13 : Matrice de Vandermonde

Soient $(z_i)_{i=0}^n$ $n+1$ points distincts 2 à 2 de $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{V} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{V}_{i,j} = z_{i-1}^{j-1}, \ \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!].$$

Q. 1 *Ecrire la matrice $\mathbb{V}$.*

Soient $\boldsymbol{w} = (w_i)_{i=1}^{n+1}$ un vecteur de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $\mathrm{P}_{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{C}_n[X]$, le polynôme défini par

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{w}}(z) = \sum_{i=0}^{n} w_{i+1} z^i$$

Q. 2 *Exprimer $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}\boldsymbol{w}$ en fonction de $\mathrm{P}_{\boldsymbol{w}}$.*

Q. 3 *En déduire que $\mathbb{V}$ est inversible.*

Exercice 14

Soient $(t_i)_{i=0}^n$, $(n+1)$ points distincts de $[-1;1]$.
On note $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[-1;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $g \in \mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ par $\mathcal{S}_n(g)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

Q. 1 *Démontrer que l'application $g \longmapsto \mathcal{S}_n(g)$ définie de $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.*

On pose

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(t) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Q. 2

a. Montrer que si $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_i(t)dt. \tag{14.1}$$

b. Montrer que si (14.1) est vérifiée, alors $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins.

On rappele que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ à $(n+1)$ points distincts, dont les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1), a pour degré d'exactitude $(n+m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{14.2}$$

avec $\pi_n(t) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(t - t_i)$.
Par la suite, on suppose que les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1;1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$ et que les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t),\ \forall n \geqslant 1 \tag{14.3}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n,

prop.2 la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{14.4}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt.$$

prop.4 Soit $n \geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i),\ C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]-1,t_0[$, $]t_0,t_1[$, $\ldots$, $]t_{n-2},t_{n-1}[$, $]t_{n-1},1[$.

Q. 3

a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ est de degré d'exactitude $2n+1$.

b. Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$.

c. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est l'unique formule de quadrature à $(n+1)$ points distincts dans $[-1;1]$ ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

Soient a,b deux réels, $a<b$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1;1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.
Soient $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, espace des fonctions définies de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$., et $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i^\star f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad L_i^\star(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Q. 4

a. Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^\star = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx,\quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{14.5}$$

b. En déduire que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^\star = w_i,\quad \forall i \in [\![0,n]\!].$$

où les w_i sont donnée par (14.1).

On suppose que $w_i^\star = w_i$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$.

Q. 5

Montrer que $\mathcal{Q}_n$ est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[a,b]$ ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisément.