Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Chapitre 6: *Intégration numérique*[1]

References

[1] F. Cuvelier, *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*, Polycopié (téléchargement), 2025.

[2] F. Cuvelier, *Analyse numérique I, interpolation, résumé.*, 2025. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_Interpolation.pdf`.

[3] ——, *Analyse numérique I, intégration numérique, résumé.*, 2025. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_Integration.pdf`.

1 Exercices du cours

Exercice 1

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.*

R. 1 On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f+\mu g,a,b) &= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j(\lambda f+\mu g)(x_j)\\
&= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j\big(\lambda f(x_j)+\mu g(x_j)\big)\\
&= \lambda(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j)\\
&= \lambda\mathcal{Q}_n(f,a,b)+\mu\mathcal{Q}_n(g,a,b).
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C>0, \quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f,a,b)| \leqslant C\,\|f\|_\infty\,, \;\; \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}).$$

[1] auteur: F. Cuvelier. Compilé le 6 décembre 2025 à 6 h 23.

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{Q}_n(f,a,b)| &= |(b-a)\sum_{j=0}^n w_j f(x_j)| \\ &\leqslant (b-a)\sum_{j=0}^n |w_j||f(x_j)| \\ &\leqslant C\,\|f\|_\infty\,, \quad \text{avec} \quad C=(b-a)\sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } \; f.\end{aligned}$$

Q. 2 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si*

$$\forall r \in [\![0,k]\!], \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \tag{1.2}$$

R. 2

$\Rightarrow$ Soit $r \in [\![0,k]\!]$, Comme $x \mapsto x^r$ est dans $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, et que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à k, on en déduit

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in [\![0,k]\!].$$

$\Leftarrow$ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[X]$. On peut le décomposer dans la base des monomes: il existe $(a_i)_{i=0}^k$ réels tels que

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i.$$

Par linéarité de l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^i, a, b).$$

Par hypothèse, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]$$

et donc

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto \mathrm{P}(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \int_a^b x^i dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto \mathrm{P}(x), a, b) = \int_a^b \sum_{i=0}^k a_i x^i dx = \int_a^b \mathrm{P}(x) dx.$$

On en déduit donc que $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k.

Exercice 2

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{2.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.
On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = \left(\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \tag{2.2}$$

Q. 1

Expliciter φ^{-1}.

R. 1

On a $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-\alpha}{\beta}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Q. 2

Montrer que si $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.

R. 2

Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{Q}(t)dt = \frac{1}{\beta}\int_a^b \mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}(x)dx.$$

Or φ^{-1} est un polynôme de degré 1 et $\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1} \in \mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k, on en déduit que

$$\int_a^b \mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\circ\varphi^{-1},a,b) = (b-a)\sum_{i=0}^n w_i \mathrm{Q}\circ\varphi^{-1}(x_i) = (b-a)\sum_{i=0}^n w_i \mathrm{Q}(t_i).$$

On a alors

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{Q}(t)dt = \frac{b-a}{\beta}\sum_{i=0}^n w_i \mathrm{Q}(t_i)$$

or

$$\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a) = \frac{b-\alpha}{\beta} - \frac{a-\alpha}{\beta} = \frac{b-a}{\beta}.$$

On en conclu donc que $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k.

Q. 3

Montrer que si $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k.

R. 3

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \beta\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{P}\circ\varphi(t)dt.$$

Or φ est un polynôme de degré 1 et $\mathrm{P}\circ\varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $\mathrm{P}\circ\varphi \in \mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(g,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{P}\circ\varphi(t)dt &= \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}\circ\varphi,\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b))\\ &= \left(\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^n w_i \mathrm{P}\circ\varphi(t_i)\\ &= \left(\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^n w_i \mathrm{P}(x_i).\end{aligned}$$

On a alors

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \beta\left(\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a)\right)\sum_{i=0}^n w_i \mathrm{P}(x_i)$$

et comme $\varphi^{-1}(b)-\varphi^{-1}(a) = \frac{b-a}{\beta}$, on en déduit que $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est de degré d'exactitude k.

Exercice 3

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire,

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{3.1}$$

où les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels à déterminer.

Q. 1 *Démontrer que* (3.1) *est de degré d'exactitude* k *(au moins) si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [\![0,k]\!]. \tag{3.2}$$

R. 1

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si la formule (3.1) est de degré d'exactitude k, elle est donc exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et plus particulièrement pour tous les monômes $1, X, X^2, \ldots, X^k$. Soit $r \in [\![0,k]\!]$. En prenant $f(x) = x^r$, la formule (3.1) étant exacte par hypothèse, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = (b-a)\sum_{i=0}^n w_i x_i^r \overset{\text{hyp}}{=} \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}$$

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que l'on a (3.2). Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[X]$. On va montrer que la formule de quadrature (3.1) est alors exacte.
Le polynôme P peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes de $\{1, X, X^2, \ldots, X^k\}$, base de $\mathbb{R}_k[X]$.
On propose ici deux démonstrations.

  - **1ère démonstration:** On a donc

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $f = \mathrm{P}$, la formule de quadrature (3.1) donne

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = (b-a)\sum_{i=0}^n w_i \mathrm{P}(x_i) = (b-a)\sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^k \alpha_j x_i^j$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1}$$

et en utilisant (3.2) on obtient

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = (b-a)\sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=0}^n w_i x_i^j$$

Ce qui donne

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude k.

  - **2ème démonstration:**
On a donc

$$\mathrm{P} = \sum_{j=0}^k \alpha_j X^j$$

et par linéarité de l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ (voir Proposition 6.1 de [3] ou Proposition 5.1.2 de [1]) on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) &= \mathcal{Q}_n\Big(\sum_{j=0}^k \alpha_j X^j, a, b\Big)\\ &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b).\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a (3.2) et, comme par définition X^j est le polynôme $x \mapsto x^j$, on obtient

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \ \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \int_a^b X^j(x)dx = \int_a^b x^j dx = \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1}.$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et donc

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).$$

Q. 2 *Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire* (3.1) *à* $(n+1)$ *points de degré d'exactitude n au moins.*

R. 2 En fixant les points $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ deux à deux distincts, pour obtenir explicitement la formule de quadrature de type (3.1) il faut déterminer les $n+1$ poids $(w_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$. Or, de (3.2), en prenant $k = n$, on obtient exactement $n+1$ équations linéaires en les (w_i) s'écrivant matriciellement sous la forme :

$$(b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice intervenant dans le système précédent s'appelle **la matrice de Vandermonde** et elle est inversible (car les (x_i) sont deux à deux distincts, voir Exercice 13. Ceci établi donc l'existence et l'unicité de poids $(w_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ tels que la formule de quadrature élémentaire (3.1) soit d'ordre (au moins) n.
Il est aussi possible de démontrer l'unicité classiquement. Supposons qu'il existe $(w_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et $(\tilde{w}_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ tels que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i \mathrm{P}(x_i).$$

On a alors $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\sum_{i=0}^{n} (w_i - \tilde{w}_i)\mathrm{P}(x_i) = 0. \tag{R3.1}$$

On rappelle que les fonctions de base de Lagrange associées aux $(n+1)$ points $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ notées L_i, sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \ \forall j \in [\![0,n]\!]$$

Soit $j \in [\![0,n]\!]$. En choisissant $\mathrm{P} = L_j$ dans (R3.1), on obtient

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (w_i - \tilde{w}_i) L_j(x_i) = (w_j - \tilde{w}_j)$$

ce qui prouve l'unicité.

Exercice 4

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. Ecrire une fonction algorithmique WeightsFromPoints permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.1.4 [1]/ 6.4 [3]. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Correction Nous avons vu, dans la Proposition 5.1.4 [1]/ 6.4 [3], que pour avoir une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude n, il est nécessaire et suffisant que les $(n+1)$ poids $(w_i)_{i=0}^n$ soient solution du système linéaire suivant:

$$(b-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

Algorithme 1 Fonction WeightsFromPoints retournant le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ associé à un tableau de points $\boldsymbol{x}$ donnés (points 2 à 2 distincts) appartenant à un intervalle $[a, b]$.

Données : $\boldsymbol{x}$: tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(n+1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention $\boldsymbol{x}(i) = x_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$
a, b : deux réels, $a < b$.

Résultat : $\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{w}(i) = w_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$

```
Fonction w ← WeightsFromPoints( x, a, b )
  B ← O_{n+1}
  A ← 0_{n+1,n+1}
  Pour i ← 1 à n+1 faire
    Pour j ← 1 à n+1 faire
      A(i, j) ← x(j)^(i − 1)
    Fin Pour
    B(i) ← (b^i − a^i)/(i ∗ (b − a))
  Fin Pour
  w ← Solve(A, B)
Fin Fonction
```

◇

Exercice 5

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{5.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \tag{5.2}$$

Q. 1

a. *Etablir que*

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right).$$

b. *Si n est impair, montrer que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $x_i \neq \dfrac{a+b}{2}$.*

c. *Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $x_i = \dfrac{a+b}{2}$.*

d. *En justifiant, donner explicitement un exemple de points $(x_i)_{i=0}^n$ vérifiant (5.2) (n restant quelconque).*

R. 1

a. De (5.2), on déduit

$$(5.2) \quad \Leftrightarrow \quad x_i + x_{n-i} = a + b \quad \Leftrightarrow \quad x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right)$$

b. Si $n = 2k-1$, (n impair), on a alors un nombre **pair** de points. Par l'absurde supposons $\exists i \in [\![0, n]\!]$ tel que $x_i = \dfrac{a+b}{2}$. Dans ce cas, on a $x_{n-i} = \dfrac{a+b}{2} = x_i$. Comme les points $(x_j)_{j=0}^n$ sont distincts deux à deux, pour avoir une contradiction, il suffit de monter que $i \neq n-i$. En effet, on a

$$[\![0, n]\!] = [\![0, 2k-1]\!] = [\![0, k-1]\!] \cup [\![k, 2k-1]\!].$$

- si $i \in [\![0, k-1]\!]$ alors

$$0 \leqslant i \leqslant k-1 \;\Leftrightarrow\; n-(k-1) \leqslant n-i \leqslant n \;\Leftrightarrow\; k \leqslant n-i \leqslant n,$$

et donc $n - i \neq i$

- si $i \in [\![k, 2k-1]\!]$ alors

$$k \leqslant i \leqslant 2k-1 \;\Leftrightarrow\; n-(2k-1) \leqslant n-i \leqslant n-k \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant n-i \leqslant k-1,$$

  et donc $n-i \neq i$.

c. Si $n = 2k$, (n pair), on a alors un nombre **impair** de points. Comme $n-k = k$, on obtient à partir de (5.2)

$$\frac{x_k + x_{n-k}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

c'est à dire

$$x_k = \frac{a+b}{2}.$$

Comme les points sont distincts deux à deux, on obtient l'unicité.

d. Soit $(x_i)_{i=0}^n$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i \in [\![0, n]\!], \; x_i = a + ih.$$

Dans ce cas, tous les points sont distincts deux à deux et on a pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $n - i \in [\![0, n]\!]$ et

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + ih + a + (n-i)h}{2}.$$

Or $a + nh = b$, ce qui donne

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Q. 2

Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.

R. 2

On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\
&= (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j \big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big) \\
&= \lambda (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu (b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \\
&= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b).
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leqslant C \left\| f \right\|_\infty, \; \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}_n(f, a, b)| &= |(b-a) \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)| \\
&\leqslant (b-a) \sum_{j=0}^{n} |w_j| |f(x_j)| \\
&\leqslant C \left\| f \right\|_\infty, \quad \text{avec} \quad C = (b-a) \sum_{j=0}^{n} |w_j| \text{ indépendant de } f.
\end{aligned}$$

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $(2m+1)$ s'écrivant sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3

a. *Calculer les dérivées* $\mathrm{P}^{(2m+1)}$ *et* $\mathrm{P}^{(2m+2)}$.

b. *Montrer que*

$$\mathrm{P}(x) = C\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \mathrm{R}(x) \tag{5.3}$$

en déterminant le degré maximum de R *et en exprimant* C *en fonction des* $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

R. 3

a. On a $\mathrm{P}(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m} a_j x^j$ et comme la dérivée $(2m+1)$ d'un polynôme de degré $2m$ est nulle, on obtient

$$\mathrm{P}^{(2m+1)}(x) = a_{2m+1}\frac{d^{2m+1}x^{2m+1}}{dx^{2m+1}} = a_{2m+1}(2m+1)!$$

et

$$\mathrm{P}^{(2m+2)}(x) = 0.$$

b. C'est la division euclidienne du polynôme P de degré $(2m+1)$ par le polynôme $x \mapsto \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}$ de degré $(2m+1)$. On a donc C constante et $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{2m}[X]$. Pour calculer C, on dérive $(2m+1)$ fois (5.3), ce qui donne

$$\mathrm{P}^{(2m+1)}(x) = C(2m+1)!.$$

En identifiant, avec la sous-question précédente, on obtient $C = a_{2m+1}$.

Q. 4

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} dx = 0. \tag{5.4}$$

R. 4

En effectuant le changement de variable $\varphi : t \mapsto \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ on obtient

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx == \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \left(\varphi(t) - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \varphi'(t)dt = \frac{b-a}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1} \int_{-1}^{1} t^{2m+1}dt = 0.$$

On peut aussi utiliser directement la primitive de $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}$ qui est $\dfrac{1}{2m+2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+2}$...

Q. 5

On suppose que la formule de quadrature élémentaire (5.1) *est exacte pour les polynômes de* $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

a. *Déduire de* (5.3) *et* (5.4) *que la formule de quadrature élémentaire* (5.1) *est exacte pour* P *si et seulement si*

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = 0. \tag{5.5}$$

b. *En utilisant **Q. 1**, démontrer que* (5.5) *est toujours vérifiée.*

R. 5

a. On a, en utilisant la linéarité de l'intégrale et (5.3)

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = C\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx + \int_a^b \mathrm{R}(x)dx$$

En utilisant la linéarité de $\mathcal{Q}_n(\bullet, a, b)$ et (5.3) on obtient

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = (b-a)C\sum_{i=0}^{n} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{R}(x_i).$$

On a $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{2m}[X]$ et, par hypothèse, la formule de quadrature est exacte pour les polyômes de les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$ ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{R}(x_i).$$

Or, la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour P si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{P}(x)dx$$

ce qui est donc équivalent à

$$(b-a)C\sum_{i=0}^{n} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = C\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx.$$

En utilisant (5.4) et le fait que $C = a_{2m+1} \neq 0$, on en déduit que la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour P si et seulement si (5.5) est vérifiée.

b. • Si $n = 2k$, (n paire), on a alors un nombre **impair** de points avec nécessairement $x_k = x_{n-k} = \frac{a+b}{2}$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + 0\times w_k + \sum_{i=k+1}^{2k} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k+1}^{2k} w_{n-i}\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j\left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

• Si $n = 2k-1$, (n impaire), on alors un nombre **pair** de points (avec $x_i \neq \frac{a+b}{2}$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$) et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \sum_{i=k}^{2k-1} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} w_{n-i}\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} w_i\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j\left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Q. 6 *Ecrire de manière très précise le résultat démontré.*

R. 6 Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par (5.1) où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant (5.2). Si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m+1$.

Exercice 6

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{6.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.*

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j(\lambda f + \mu g)(x_j) \\
&= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j\big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big) \\
&= \lambda(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \\
&= \lambda \mathcal{Q}_n(f,a,b) + \mu \mathcal{Q}_n(g,a,b).
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est donc linéaire.

On note, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

et $t_i = (x_i - a)/(b-a)$. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

et que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi_x \in [a,b],\quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{6.2}$$

Q. 2

Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt. \tag{6.3}$$

R. 2

Par le changement de variables $s : t \longrightarrow a + (b-a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x)dx = \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} L_i \circ s(t) s'(t)dt = (b-a)\int_0^1 L_i \circ s(t)dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b-a)t_i$ où $t_i = (x_i - a)/(b-a)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L_i \circ s(t)dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s(t)-s(t_j)}{s(t_i)-s(t_j)}dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(b-a)(t-t_j)}{(b-a)(t_i-t_j)}dt \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}dt
\end{aligned}$$

et on obtient bien (6.3).

Q. 3

a. *Montrer que si $\mathcal{Q}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a*

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx. \tag{6.4}$$

b. *Montrer que si (6.4) est vérifiée, alors $\mathcal{Q}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins.*

R. 3

a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i(x)dx.$$

Or comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j L_i(x_j) = (b-a)w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)dx.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (6.3), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \overset{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx.$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\mathrm{P}(x_i)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i)\int_a^b L_i(x)dx \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(x_i) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).
\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

Q. 4

On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (6.4). Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ alors on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \int_a^b \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|dx \tag{6.5}$$

R. 4

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$, on déduit de (6.2) que pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi_x \in [a,b]$ tel que

$$\begin{aligned}
|f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_n(x)\right| \\
&\leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}|\pi_n(x)|
\end{aligned}$$

L'application $f - \mathcal{L}_n(f)$ étant continue sur $[a;b]$, elle est alors intégrable sur $[a,b]$, et l'application $|f - \mathcal{L}_n(f)|$ l'est aussi. De même $|\pi_n(x)|$ est intégrable sur $[a,b]$. On obtient alors

$$\int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)|dx \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\int_a^b |\pi_n(x)|dx.$$

De plus

$$\left|\int_a^b f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)|dx$$

ce qui donne

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|dx.$$

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins et le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_n(f)$ est de degré n donc on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx &= \mathcal{Q}_n(\mathcal{L}_n(f),a,b)\\ &= (b-a)\sum_{i=0}^n w_i\mathcal{L}_n(f)(x_i)\\ &= (b-a)\sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \text{ car } \mathcal{L}_n(f)(x_i) = f(x_i)\\ &= \mathcal{Q}_n(f,a,b)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \mathcal{Q}_n(f,a,b)\right| &= \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x)dx\right|\\ &\leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\int_a^b |\prod_{i=0}^n (x-x_i)|dx.\end{aligned}$$

Exercice 7

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in [\![0,n]\!]$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$

Q. 1 *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{L}_i((a+b)-x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

R. 1

Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On note $\varphi(x) = (a+b)-x$ le polynôme de degré 1 et $\mathrm{P} = \mathrm{L}_i \circ \varphi$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ (la composé de 2 polynômes est de degré le produit des degrés des 2 polynômes).
On a

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad x_{n-j} = (a+b) - x_j$$

et

$$\mathrm{P}(x_j) = \mathrm{L}_i((a+b)-x_j) = \mathrm{L}_i(x_{n-j}) = \delta_{i,n-j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n-j \\ 0, & \text{sinon}\end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = n-i \\ 0, & \text{sinon}\end{cases} = \delta_{n-i,j}.$$

C'est à dire

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(x_j) = \delta_{n-i,j}.$$

Or L_{n-i} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la relation précédente dont $\mathrm{P} = \mathrm{L}_{n-i}$ (voir Lemme 1.1 [2]).

Q. 2 *Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par*

$$w_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad w_i = w_{n-i}$$

R. 2

Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On note $t = \varphi(x) = (a+b) - x$ le changement de variable affine. On a alors $\varphi^{-1}(t) = (a+b) - t$ et

$$\begin{aligned}
w_i &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i(t)dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{L}_i \circ \varphi(x)\varphi'(x)dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_b^a \mathrm{L}_i((a+b)-x)(-1)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_i((a+b)-x)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{L}_{n-i}(x)dx \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= w_{n-i}.
\end{aligned}$$

Exercice 8

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{8.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a,b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.
On suppose que (8.1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1 *Démontrer que l'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ définie de $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.*

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j(\lambda f + \mu g)(x_j) \\
&= (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j\big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big) \\
&= \lambda(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) + \mu(b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j g(x_j) \\
&= \lambda \mathcal{Q}_n(f,a,b) + \mu \mathcal{Q}_n(g,a,b).
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$ est donc linéaire.

Soient π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

et $m \in \mathbb{N}^*$.

rappel division euclidienne: Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$\mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R} \quad \text{et} \quad \deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B}).$$

Dans la division euclidienne de A par B, Q est le quotient et R le reste.

Q. 2

a. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. Déterminer les degrés maximaux des polynômes Q (quotient) et R (reste), obtenus par la division euclidienne de P par π_n, et satisfaisant

$$\mathrm{P} = \pi_n \mathrm{Q} + \mathrm{R}.$$

b. *En déduire que*
$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X], \quad \int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx. \tag{8.2}$$
où Q *est le quotient de la division euclidienne de* P *par* π_n,

R. 2

a. On effectue la division euclidienne de P, deg(P) $\leqslant n+m$, par π_n, $\deg(\pi_n) = n+1$. On a alors l'existence et l'unicité d'un couple (Q, R) tel que $\deg(\mathrm{R}) < \deg(\pi_n) = n+1$, c'est à dire $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$, et
$$\mathrm{P} = \pi_n \mathrm{Q} + \mathrm{R}.$$
- Si $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n < (n+1) = \deg(\pi_n)$, $\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{R} = \mathrm{P}$.
- Si $\deg(\mathrm{P}) \geqslant (n+1) = \deg(\pi_n) > \deg(\mathrm{R})$, on obtient
$$\deg(\mathrm{P}) = \deg(\pi_n \mathrm{Q}) = \deg(\pi_n) + \deg(\mathrm{Q})$$
et donc $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P}) - \deg(\pi_n) \leqslant n+m-(n+1) = m-1$, c'est à dire $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

En résumé, on a $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$, et on peut noter que, dans les deux cas, $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

b. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R, respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n. On vient de voir que $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Par linéarite de l'intégrale, on a
$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx + \int_a^b \mathrm{R}(x)dx$$
et par linéarite de $\mathcal{Q}_n$
$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b) + \mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b).$$
Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n et comme $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ on obtient
$$\int_a^b \mathrm{R}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{R}, a, b).$$
On en déduit alors que
$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b).$$
Par construction $\pi_n(x_j) = 0$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, ce qui donne
$$\mathcal{Q}_n(\mathrm{Q}\pi_n, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j \mathrm{Q}(x_j)\pi_n(x_j) = 0$$
et donc
$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = \int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx.$$

Q. 3

Démontrer que (8.1) *a pour degré d'exactitude* $(n+m)$ *au moins si et seulement si*
$$\forall \mathrm{H} \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \quad \int_a^b \pi_n(x)\mathrm{H}(x)dx = 0. \tag{8.3}$$

R. 3

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que (8.3) est vérifié.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R, respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n. On a vu en **Q.** 2 que $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Comme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on obtient
$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = 0$$

ce qui donne en utilisant (8.2):

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = 0.$$

Comme P est quelconque dans $\mathbb{R}_{n+m}[X]$, la formule de quadrature est donc de degré d'exactitude $n+m$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que la formule de quadrature est de degré d'exactitude $(n+m)$.
Pour tout $\mathrm{H} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{H}\pi_n \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. La formule de quadrature est donc exacte pour P:

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx - \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) = 0.$$

Par construction, la division euclienne de P par π_n a pour quotient H et pour reste 0. En utilisant (8.2), on obtient alors

$$\int_a^b \mathrm{Q}(x)\pi_n(x)dx = 0.$$

Q. 4

En déduire le degré maximal d'exactitude de (8.1).

R. 4

Si $\mathrm{Q} = \pi_n$, on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)\mathrm{Q}(x)dx = \int_a^b \mathrm{Q}^2(x)dx > 0.$$

Comme $\deg(\pi_n) = n+1$, on déduit que l'on doit avoir $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant n$ pour que (8.3) soit vérifiée. On a alors

$$\deg(\mathrm{P}) = m + n = \deg(\mathrm{Q}) + \deg(\pi_n) \leqslant n + (n+1)$$

et donc $m \leqslant n+1$. Le degré maximal d'exactitude est donc $2n+1$.

Q. 5

Démontrer que (8.1) *a pour degré d'exactitude* $(n+m)$ *au moins si et seulement si*

$$\int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \ \forall k \in [\![0, m-1]\!]. \tag{8.4}$$

R. 5

D'après la **Q. 3**, il suffit de démontrer que (8.3) est équivalent à (8.4).

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose (8.3) vérifiée.
Le résultat est immédiat car, $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose (8.4) vérifiée.
Soit $\mathrm{H} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$. Il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k.$$

On utilise la linéarite de l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{H}(x)\pi_n(x)dx &= \int_a^b \pi_n(x) \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_a^b \pi_n(x)x^k dx \\ &\overset{(8.4)}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \times 0 = 0.\end{aligned}$$

Exercice 9

Q. 1

Ecrire une fonction algorithmique WeightsPointsNC *retournant les $(n+1)$ points et les $(n+1)$ poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n+1)$ points.*

R. 1

Algorithme 2 Fonction WeightsPointsNC retournant le tableau de points $\boldsymbol{x}$ donnés correspondant à la discrétisation régulière intervalle $[a, b]$. et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$ associé à un

Données : $a,\ b$: deux réels, $a < b$,
n : $n \in \mathbb{N}^*$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{x}(i) = x_{i-1},\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$
et $x_{i-1} = a + (i-1)h,\ h = (b-a)/n$,
$\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{w}(i) = w_{i-1},\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$

Fonction $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}] \leftarrow$ WeightsPointsNC(a, b, n)
  $\boldsymbol{x} \leftarrow a : (b-a)/n : b$
  $\boldsymbol{w} \leftarrow$ WeightsFromPoints$(\boldsymbol{x}, a, b)$
Fin Fonction

Q. 2

Ecrire une fonction algorithmique QuadElemNC *retournant la valeur de $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ correpondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n+1)$ points.*

R. 2

On a de manière générique l'algorithme suivant:

Algorithme 3 Fonction QuadElemGen retourne la valeur de $I = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$.

Données : f : une fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$,
a, b : deux réels avec $a < b$
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(n+1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention $\boldsymbol{x}(i) = x_{i-1},\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$
$\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\boldsymbol{w}(i) = w_{i-1},\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$
Résultat : I : un réel

Fonction $I \leftarrow$ QuadElemGen($f, a, b, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}$)
  $I \leftarrow 0$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** Length$(\boldsymbol{x})$ **faire**
    $I \leftarrow I + \boldsymbol{w}(i) * f(\boldsymbol{x}(i))$
  Fin Pour
  $I \leftarrow (b-a) * I$
Fin Fonction

On peut noter que si l'on dispose de la fonction $s \leftarrow \mathrm{Dot}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ correpondant au produit scalaire de deux vecteurs du même espace alors on a directement

$$I \leftarrow (b-a) * \mathrm{Dot}(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{x})).$$

Algorithme 4 Fonction QuadElemGen retourne la valeur de $I = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$ où les poids w_i et les points x_i sont ceux définis par la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes

Données : f : une fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$,
a, b : deux réels avec $a < b$,
n : $n \in \mathbb{N}^*$
Résultat : I : un réel

Fonction $I \leftarrow$ QuadElemNC(f, a, b, n)
  $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}] \leftarrow$ WeightsPointsNC(a, b, n)
  $I \leftarrow$ QuadElemGen$(f, a, b, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$
Fin Fonction

Exercice 10

Q. 1 *Déterminer les points t_0, t_1 de l'intervalle $[-1,1]$ et les poids w_0, w_1 tel que la formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

R. 1 D'après la Proposition 5.1.6 [1]/ 6.3 [3] , si t_0 et t_1 sont distincts et dans l'intervalle $[-1,1]$ alors avec

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-t_1}{t_0-t_1}dt \text{ et } w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-t_0}{t_1-t_0}dt$$

la formule de quadrature est de degré d'exactitude 1.
Pour déterminer les points t_0 et t_1, on utilise la Proposition 5.1.7 [1]/ 6.7 [3] (degré maximal d'exactitude) avec $m = n+1 = 2$: la formule de quadrature est de degré $2n+1 = 3$ ssi

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)Q(t)dt = 0, \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_1[X]$$

avec $\pi_1(t) = (t-t_0)(t-t_1)$. Par linéarité ceci est équivalent à

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)t^k dt = 0, \forall k \in [\![0,1]\!]$$

c'est à dire

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)dt = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1} \pi_1(t)tdt = 0.$$

Or on a

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 - (t_0+t_1)t + t_0t_1 dt = \frac{2}{3} + 2t_0t_1$$

et

$$\int_{-1}^{1} \pi_1(t)tdt = \int_{-1}^{1} t^3 - (t_0+t_1)t^2 + t_0t_1 t dt = -\frac{2}{3}(t_0+t_1).$$

On est amené à résoudre le système non linéaire

$$t_0t_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{2}{3}(t_0+t_1) = 0$$

ce qui donne $t_0 = -\sqrt(3)/3$ et $t_1 = \sqrt(3)/3$.
Il reste à calculer w_0 et w_1. On a

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t-\sqrt(3)/3}{-2\sqrt(3)/3}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{-\sqrt(3)/3}{-2\sqrt(3)/3}dt = 1/2$$

et

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t+\sqrt(3)/3}{2\sqrt(3)/3}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt(3)/3}{2\sqrt(3)/3}dt = 1/2.$$

La formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx g(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + g(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

est donc d'ordre 3.

Q. 2 *En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ qui soit de degré d'exactitude 3.*

R. 2

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, en appliquant la Proposition 5.1.1 [1]/ 6.2 [3] (changement de variable affine), pour obtenir que

$$(b-a)\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1)\right)$$

est une formule de quadrature approchant $\int_a^b f(x)dx$ avec un degré d'exactitude de 3 où $x_0 = \varphi(t_0)$ et $x_1 = \varphi(t_1)$.

Exercice 11

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur $[-1,1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1}(t)$. Cette formule à pour degré d'exactitude $2n+1$.

Soient $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|\mathrm{P}\| = \langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle^{1/2}$ la norme associée.
Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n+1)$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1

Montrer que

$$c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - c_n\mathrm{M}_{n-1}(t), \quad n > 1 \tag{11.1}$$

avec

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \text{ et } c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$$

R. 1

Par définition, on a $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\|\mathrm{P}_n\|}$ et

$$\|\mathrm{P}_n\|^2 = \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n(t)\mathrm{P}_n(t)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{M}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\mathrm{P}_n.$$

De plus, par la formule de récurrence de Bonnet, on obtient

$$\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ et } \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$$

ainsi que, $\forall n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\mathrm{M}_{n+1}(t) &= (2n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+1}}t\mathrm{M}_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\mathrm{M}_{n-1}\\ &= \sqrt{2(2n+1)}t\mathrm{M}_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\mathrm{M}_{n-1}\end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}$, on a

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}\mathrm{M}_{n+1}(t) = t\mathrm{M}_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}\mathrm{M}_{n-1}$$

Or on a

$$n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}} = c_n$$

et

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}} = c_{n+1}$$

ce qui démontre le résultat voulu.

On définit le vecteur $\boldsymbol{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\boldsymbol{M}(t) = (\mathrm{M}_0(t), \dots, \mathrm{M}_n(t))^t.$$

Q. 2 *Montrer que l'on a*

$$t\boldsymbol{M}(t) = \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1} \tag{11.2}$$

où l'on explictera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1, \dots, c_n$. Le vecteur $\boldsymbol{e}_{n+1}$ étant le $(n+1)$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

R. 2

On déduit de la question précédente que

$$t\mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}t = c_1\mathrm{M}_1(t)$$

et

$$t\mathrm{M}_i(t) = c_i\mathrm{M}_{i-1}(t) + c_{i+1}\mathrm{M}_{i+1}(t), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Ces $(n+1)$ équations peuvent s'écrire matriciellement sous la forme

$$t\begin{pmatrix} \mathrm{M}_0(t) \\ \mathrm{M}_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{M}_{n-1}(t) \\ \mathrm{M}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{M}_0(t) \\ \mathrm{M}_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{M}_{n-1}(t) \\ \mathrm{M}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{A}\boldsymbol{M}(t) + c_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}(t)\boldsymbol{e}_{n+1}.$$

Q. 3 *En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.*

R. 3

Le polynôme de Legendre $\mathrm{P}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ admet $(n+1)$ racines simples distinctes dans $]-1, 1[$ notées $(t_i)_{i=0}^n$. (voir rappels) Donc le polynôme de Legendre normalisé $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ a les mêmes racines et on déduit de la question précédente que

$$\mathbb{A}\boldsymbol{M}(t_i) = t_i\boldsymbol{M}(t_i), \ \forall i \in [\![0, n]\!].$$

Comme les $(n+1)$ racines de P_{n+1} séparent strictement les n racines de P_n (voir rappels), alors $\mathrm{P}_n(t_i) \neq 0$ et donc $\mathrm{M}_n(t_i) \neq 0$. On en déduit que le vecteur $\boldsymbol{M}(t_i)$ est non nul et,

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ (t_i, \boldsymbol{M}(t_i)) \text{ est un mode propre de } \mathbb{A}.$$

On peut noter que $\mathbb{A}$ est symétrique et donc ses valeurs propres sont réelles.
Les $(n+1)$ valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$ sont les $(n+1)$ racines de P_{n+1}, et donc les $(n+1)$ points de la formule de quadrature de Gauss-Legendre.

Q. 4 *Montrer que*

$$2\sum_{k=0}^{n} w_k\mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k) = \delta_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2 \tag{11.3}$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

R. 4

Par construction, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{M}_i(t)\mathrm{M}_j(t)dx = \delta_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![0, n]\!].$$

On a $\mathrm{M}_i \in \mathbb{R}_i[X]$ et $\mathrm{M}_j \in \mathbb{R}_j[X]$, ce qui donne $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j \in \mathbb{R}_{i+j}[X]$ avec $i + j \leqslant 2n$. Or la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points a pour degré d'exactitude $2n+1$, elle est donc exacte pour le polynôme $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$. On en déduit alors

$$\delta_{i,j} = \int_{-1}^{1} \mathrm{M}_i(t)\mathrm{M}_j(t)dt = 2\sum_{k=0}^{n} w_k\mathrm{M}_i(t_k)\mathrm{M}_j(t_k), \ \forall (i,j) \in [\![0, n]\!]$$

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0, \ldots, w_n)$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = \mathrm{M}_j(t_i)$, $\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2$.

Q. 5

a. Montrer que $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.

b. En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.

c. En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{M}_k(t_i)\right)^2$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$.

R. 5

a. Soit $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} (\mathbb{P}^{\mathsf{t}})_{i,k}(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i}(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j}\end{aligned}$$

et, comme $\mathbb{W}$ est diagonale,

$$(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} = \sum_{l=1}^{n+1} \mathbb{W}_{k,l}\mathbb{P}_{l,j} = \mathbb{W}_{k,k}\mathbb{P}_{k,j}.$$

On obtient donc

$$(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i}\mathbb{W}_{k,k}\mathbb{P}_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} w_{k-1}\mathrm{M}_{i-1}(t_{k-1})\mathrm{M}_{j-1}(t_{k-1}).$$

En utilisant la relation démontré dans la question précédente, on a

$$(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} = \frac{1}{2}\delta_{i-1,j-1} = \frac{1}{2}\delta_{i,j}$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P} = \frac{1}{2}\mathbb{I}$$

et on en déduit que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{W}$ sont inversibles .

b. A partir de $\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P} = \frac{1}{2}\mathbb{I}$, on déduit

$$2\mathbb{I} = \left(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\mathbb{W}\mathbb{P}\right)^{-1} = 2\mathbb{I} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\right)^{-1}$$

En multipliant par $\mathbb{P}$ à gauche et par $\mathbb{P}^{\mathsf{t}}$ à droite, on obtient

$$\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{t}}.$$

c. Comme la matrice $\mathbb{W}$ est diagonale inversible, son inverse est diagonale et on a

$$\left(\mathbb{W}^{-1}\right)_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{W}_{i,i}} = \frac{1}{w_{i-1}}, \quad \forall i \in [\![1, n+1]\!].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{w_{i-1}} &= 2\left(\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\right)_{i,i} \\ &= 2\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}\left(\mathbb{P}^{\mathsf{t}}\right)_{j,i} \\ &= 2\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}^2 \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{M}_k(t_{i-1})\right)^2, \quad \forall i \in [\![1, n+1]\!].\end{aligned}$$

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** eig$(\mathbb{A})$ retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 6

a. *Ecrire la fonction* $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ *retournant le tableau des points* $\boldsymbol{t}$ *et le tableau des poids* $\boldsymbol{w}$ *en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.*

b. *Ecrire la fonction* $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ *retournant une approximation de* $\int_a^b f(x)dx$ *en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à* $(n+1)$ *points sur l'intervalle* $[a, b]$.

R. 6

a. Les $(n+1)$ points $(t_i)_{i=0}^n$ de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$, sont les racines du polynôme de Legendre P_{n+1} de degré $n+1$. Pour les calculer, on va utiliser le fait que ce sont les valeurs propres de la matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

avec $c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2-1}}$, $\forall k \geqslant 1$.
Pour calculer les poids $(w_i)_{i=0}^n$, on va utiliser la formule

$$\frac{1}{w_i} = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{M}_k(t_i)\right)^2, \ \forall i \in [\![0, n]\!]$$

conjointement avec la formule de récurrence

$$\mathrm{M}_k(t) = \frac{1}{c_k}\big(t\mathrm{M}_{k-1}(t) - c_{k-1}\mathrm{M}_{k-2}(t)\big), \ k \geqslant 2, \ \text{avec } \mathrm{M}_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \ \mathrm{M}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Algorithme 5 Fonction GaussLegendre retournant le tableau des points $\boldsymbol{t}$ et le tableau des poids $\boldsymbol{w}$

Données : n : $n \in \mathbb{N}$
Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{t}(i) = t_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$
$\boldsymbol{w}$: vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\boldsymbol{w}(i) = w_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$

Fonction $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow$ GaussLegendre(n)
  $\boldsymbol{c} \leftarrow \boldsymbol{O}_n$
  $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1,n+1}$
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $\boldsymbol{c}(k) \leftarrow \text{sqrt}(k^2/(4 * k\hat{\ }2 - 1))$
    $\mathbb{A}(k, k+1) \leftarrow \boldsymbol{c}(k)$
    $\mathbb{A}(k+1, k) \leftarrow \boldsymbol{c}(k)$
  Fin Pour
  $\boldsymbol{t} \leftarrow \text{eig}(\mathbb{A})$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
    $M0 \leftarrow \text{sqrt}(1/2)$
    $M1 \leftarrow \text{sqrt}(3/2) * \boldsymbol{t}(i)$
    $S \leftarrow M0\hat{\ }2 + M1\hat{\ }2$
    Pour $k \leftarrow 2$ **à** n **faire**
      $M \leftarrow (1/\boldsymbol{c}(k)) * (M1 * \boldsymbol{t}(i) - \boldsymbol{c}(k-1) * M0)$
      $S \leftarrow S + M\hat{\ }2$
      $M0 \leftarrow M1$
      $M1 \leftarrow M$
    Fin Pour
    $w(i) \leftarrow 1/(2 * S)$
  Fin Pour
Fin Fonction

b. On va utiliser la formule

$$I = (b-a) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

avec $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ où les points $(t_i)_{i=0}^n$ et les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont ceux de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$.

Algorithme 6 Fonction QuadElemGaussLegendre retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $n+1$ points sur l'intervalle $[a,b]$.

Données : f : une fonction de $[a,b]$ à valeurs réels
a, b : deux réels avec $a < b$
n : $n \in \mathbb{N}$

Résultat : I : un réel

Fonction $I \leftarrow$ QuadElemGaussLegendre(f, a, b, n)
  $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}] \leftarrow$ GaussLegendre(n)
  $I \leftarrow 0$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
    $I \leftarrow I + \boldsymbol{w}(i) * f((a+b)/2 + (b-a)/2 * t(i))$
  Fin Pour
  $I \leftarrow (b-a) * I$
Fin Fonction

Exercice 12

Ecrire une fonction algorithmique QuadSimpson retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f. On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

Correction En notant $m_j = \frac{\alpha_{j-1}+\alpha_j}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx &\approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{k} (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j)) \\ &\approx \frac{h}{6}\left(4\sum_{j=1}^{k} f(m_j) + f(\alpha_0) + 2\sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) + f(\alpha_k)\right) \end{aligned} \tag{12.1}$$

Algorithme 7 Fonction QuadSimpson retourne une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f.

Données : f : une fonction définie de $[alpha, beta]$ dans $\mathbb{R}$,
$alpha, beta$: deux réels avec $alpha < beta$,
k : $n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : I : un réel

Fonction $I \leftarrow$ QuadSimpson($f, alpha, beta, k$)
  $h \leftarrow (beta - alpha)/k$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow alpha : h : beta$
  $\boldsymbol{m} \leftarrow alpha + h/2 : h : beta$
  $S \leftarrow 0$ ▷ Calcul de $\sum_{j=1}^{k} f(m_j)$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** k **faire**
    $S \leftarrow S + f(\boldsymbol{m}(j))$
  Fin Pour
  $I \leftarrow 4 * S$
  $S \leftarrow 0$ ▷ Calcul de $\sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) = \sum_{j=2}^{k} f(\boldsymbol{x}_j)$
  Pour $j \leftarrow 2$ **à** k **faire**
    $S \leftarrow S + f(\boldsymbol{x}(j))$
  Fin Pour
  $I \leftarrow (h/6) * (I + 2 * S + f(\boldsymbol{x}(1)) + f(\boldsymbol{x}(k+1)))$
Fin Fonction

2 Exercices supplémentaires

Exercice 13 : Matrice de Vandermonde

Soient $(z_i)_{i=0}^{n}$ $n+1$ points distincts 2 à 2 de $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{V} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{V}_{i,j} = z_{i-1}^{j-1},\ \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!].$$

Q. 1 *Ecrire la matrice* $\mathbb{V}$.

R. 1 On a

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^n \end{pmatrix}$$

Soient $\boldsymbol{w} = (w_i)_{i=1}^{n+1}$ un vecteur de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $\mathrm{P}_{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{C}_n[X]$, le polynôme défini par

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{w}}(z) = \sum_{i=0}^{n} w_{i+1} z^i$$

Q. 2 *Exprimer* $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}\boldsymbol{w}$ *en fonction de* $\mathrm{P}_{\boldsymbol{w}}$.

R. 2 On a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{n+1}$ et, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{V}_{i,j} \boldsymbol{w}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} z_{i-1}^{j-1} w_j \\ &= \sum_{j=0}^{n} w_{j+1} z_{i-1}^{j} = \mathrm{P}_{\boldsymbol{w}}(z_{i-1}). \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\boldsymbol{w}}(z_0) \\ \vdots \\ \mathrm{P}_{\boldsymbol{w}}(z_n) \end{pmatrix}.$$

Q. 3 *En déduire que* $\mathbb{V}$ *est inversible.*

R. 3 La matrice $\mathbb{V}$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit à l'élément nul, c'est à dire

$$\ker(\mathbb{V}) = \{\boldsymbol{0}\}.$$

Soit $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{n+1})^* \in \mathbb{C}^{n+1}$, tel que $\mathbb{V}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, montrons qu'alors $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
On a

$$\mathbb{V}\boldsymbol{u} = \mathbb{V}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}(z_0) \\ \vdots \\ \mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}(z_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

Les $n+1$ points $(z_i)_{i=0}^{n}$ sont distincts 2 à 2, donc le polynôme $\mathrm{P}_{\boldsymbol{u}}$ admet $n+1$ racines distinctes hors $\mathrm{P}_{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{C}_n[X]$, c'est

donc le polynôme nul, c'est à dire $u_i = 0$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$. On a donc $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
La matrice $\mathbb{V}$ est donc inversible.

Exercice 14

Soient $(t_i)_{i=0}^n$, $(n+1)$ points distincts de $[-1;1]$.

On note $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[-1;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $g \in \mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^1 g(t)dt$ par $\mathcal{S}_n(g)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

Q. 1 *Démontrer que l'application $g \longmapsto \mathcal{S}_n(g)$ définie de $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.*

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$ (espace vectoriel), et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([-1;1];\mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n(\lambda f + \mu g) &= 2\sum_{j=0}^n w_j(\lambda f + \mu g)(x_j) \\
&= 2\sum_{j=0}^n w_j\big(\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)\big) \\
&= \lambda 2\sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu 2\sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\
&= \lambda \mathcal{S}_n(f) + \mu \mathcal{S}_n(g).
\end{aligned}$$

L'application $\mathcal{S}_n$ est donc linéaire.

On pose

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Q. 2

a. Montrer que si $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 L_i(t)dt. \tag{14.1}$$

b. Montrer que si (14.1) est vérifiée, alors $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins.

R. 2

a. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{S}_n(L_i) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_{-1}^1 L_i(t)dt.$$

Comme $L_i(t_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, on en déduit

$$\mathcal{S}_n(L_i) = 2\sum_{j=0}^n w_j L_i(t_j) = 2w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 L_i(t)d.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (14.1), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n g(t_i)\int_{-1}^1 L_i(t)dt.$$

On note $\mathcal{L}_n(P)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ passant par les points $(t_i, g(t_i))_{i=0}^n$ donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n(P)(t) = \sum_{i=0}^{n} g(t_i) L_i(t).$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)dt &= \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_n(P)(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} L_i(t)\mathrm{P}(t_i)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(t_i) \int_{-1}^{1} L_i(t)dt \\
&= 2\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(t_i) = \mathcal{S}_n(\mathrm{P}).
\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes de degré n au moins.

On rappele que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ à $(n+1)$ points distincts, dont les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1), a pour degré d'exactitude $(n+m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \tag{14.2}$$

avec $\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(t - t_i)$.

Par la suite, on suppose que les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1;1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$ et que les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(t) = (2n+1)t\mathrm{P}_n(t) - n\mathrm{P}_{n-1}(t), \ \forall n \geqslant 1 \tag{14.3}$$

avec $\mathrm{P}_0(t) = 1$ et $\mathrm{P}_1(t) = t$.
On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n,

prop.2 la famille $\{\mathrm{P}_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{14.4}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_m(t)\mathrm{P}_n(t)dt.$$

prop.4 Soit $n \geqslant 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $]-1,1[$, c'est à dire

$$\mathrm{P}_n(t) = C\prod_{i=0}^{n-1}(t - t_i), \ C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacunes dans l'un des $(n+1)$ intervalles $]-1, t_0[$, $]t_0, t_1[$, ..., $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, 1[$.

Q. 3

a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ est de degré d'exactitude $2n+1$.

b. Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$.

c. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est l'unique formule de quadrature à $(n+1)$ points distincts dans $[-1;1]$ ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

R. 3

a. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1), $\mathcal{S}_n$ a pour degré d'exactiude $2n+1$ si et seulement si on a (14.2) avec $m = n+1$.

D'après les propriétés des polynômes de Legendre P_n, on a $\mathrm{P}_{n+1}(t) = C\pi_n(t)$ avec $C \in \mathbb{R}^*$.

On en déduit que (14.2) avec $m = n+1$ est équivalent à

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{n+1}(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or, la famille des les polynômes de Legendre $\{\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, la relation précedente est vérifiée.

b. Supposons qu'il existe une autre formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[-1, 1]$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i)$$

ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisement. D'après la **Q. 2**, on a donc

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \tilde{w}_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{L}_i(t)dt, \quad \text{où } \tilde{L}_i(t) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Notons $\tilde{\pi}_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - \tilde{t}_i)$. Comme $\mathcal{S}_n$ et $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ont pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisement, on déduit de (14.2) avec $m = n+1$, que

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = \int_{-1}^{1} \tilde{\pi}_n(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le polynôme $\mathrm{R} = \pi_n - \tilde{\pi}_n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ car les polynômes π_n et $\tilde{\pi}_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont unitaires. On a alors

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{R}(t)\mathrm{Q}(t)dt = 0, \ \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$$

En choisissant $\mathrm{Q} = \mathrm{R}$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{R}^2(t)dt = 0$$

ce qui entraine $\mathrm{R} = 0$ et donc les points $(\tilde{t}_i)_{i=0}^n$ et $(t_i)_{i=0}^n$ sont identiques à une permutation des indices près, c'est à dire

$$\tilde{t}_{\sigma(i)} = t_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!].$$

On a alors $\tilde{w}_{\sigma(i)} = w_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]$ et

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i) = 2\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_{\sigma(i)} g(\tilde{t}_{\sigma(i)}) = 2\sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i) = \mathcal{S}_n(g).$$

Soient a, b deux réels, $a < b$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]$, où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $]-1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.
Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, espace des fonctions définies de $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$., et $n \in \mathbb{N}$.

On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i^\star f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i^\star(x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Q. 4

a. *Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si*

$$w_i^\star = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{14.5}$$

b. *En déduire que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si*

$$w_i^\star = w_i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!].$$

où les w_i sont donnée par (14.1).

R. 4

a. Démontrons l'équivalence

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a $L_i^\star \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

Or comme $L_i^\star(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) = (b-a)\sum_{j=0}^n w_j^\star L_i^\star(x_j) = (b-a)w_i^\star.$$

Ce qui donne

$$w_i^\star = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Par hypothèse, les poids $(w_i^\star)_{i=0}^n$ étant donnés par (14.5), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i)\int_a^b L_i^\star(x)dx.$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $\mathrm{P} = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i^\star(x)\mathrm{P}(x_i)dx \\
&= \sum_{i=0}^n \mathrm{P}(x_i)\int_a^b L_i^\star(x)dx \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^n w_i^\star \mathrm{P}(x_i) = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).
\end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

b. Il suffit pour celà de démontrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b L_i^\star(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 L_i(t)dt. \tag{R_1}$$

On utilise le changement de variable

$$x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

ce qui correspond bien à $x_i = \varphi(t_i)$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b L_i^\star(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i^\star \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt \\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 L_i^\star \circ \varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L_i^\star \circ \varphi(t) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{\varphi(t)-x_j}{x_i-x_j}\\
&= \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_j)}{\varphi(t_i)-\varphi(t_j)}\\
&= \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)-\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_j\right)}{\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_i\right)-\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_j\right)}\\
&= \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} = L_i(t).
\end{aligned}$$

ce qui donne (R_1).

On suppose que $w_i^\star = w_i$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$.

Q. 5

Montrer que $\mathcal{Q}_n$ est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[a, b]$ ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisément.

R. 5

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Avec le changement de variable $x = \varphi(t) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \mathrm{P}\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt\\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}\circ\varphi(t)dt. \qquad (R_2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b) &= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i^\star \mathrm{P}(x_i)\\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i \mathrm{P}(\varphi(t)_i)\\
&= \frac{b-a}{2}\mathcal{S}_n(\mathrm{P}\circ\varphi) \qquad (R_3)
\end{aligned}$$

Comme $\varphi \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $\mathrm{P}\circ\varphi \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.[a] La formule de quadrature $\mathcal{S}_n$ étant de degré d'exactitue $2n+1$, on a alors

$$\mathcal{S}_n(\mathrm{P}\circ\varphi) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}\circ\varphi(t)dt.$$

On en déduit en utilisant (R_2)

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \frac{b-a}{2}\mathcal{S}_n(\mathrm{P}\circ\varphi)$$

puis en utilisant (R_3)

$$\int_a^b \mathrm{P}(x)dx = \mathcal{Q}_n(\mathrm{P}, a, b).$$

La formule de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ est donc de degré d'exactitude $2n+1$.
Par l'absurde on peut démontrer que $\mathcal{Q}_n$ n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$ car sinon $\mathcal{S}_n$ serait aussi de degré d'exactitude $2n+2$.
Par l'absurde on peut démontrer que $\mathcal{Q}_n$ est unique car sinon $\mathcal{S}_n$ ne serait pas unique.

[a] Rappel: Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_p[X]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_q[X]$, alors $\mathrm{P}\circ\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{pq}[X]$.