Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*[*]
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes directes

1 Exercices cours

Exercice 1 : Résolution système triangulaire supérieur

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Expliquer comment calculer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de $\boldsymbol{x}$.*

Q. 2 *Ecrire la fonction* ResTriSup *permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Exercice 2 : Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2
a. *Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*
b. *Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.*

Q. 3
a. *Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*
b. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

Exercice 3 : Matrice d'élimination

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hdashline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3.1}$$

Q. 1
a. *Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*
b. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

[*] Compilé le 2025/10/24 à 09:28:29.

Q. 2

a. *Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

b. *En déduire que la première colonne de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \ldots, 0)^{\boldsymbol{t}}$ i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1

Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.

Q. 2

a. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

b. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q. 3

Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?

Exercice 5 : Vers la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 6 : factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Montrer que s'il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

Q. 2

Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.

Exercice 7 : factorisation de Cholesky

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Montrer que si $\mathbb{A}$ admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

Q. 2

Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky.

Q. 3

On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

a. *Montrer que $\mathbb{A}$ admet une factorisation positive de Cholesky.*

b. *Montrer que cette factorisation est unique.*

Exercice 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 1

a. Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.

b. Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$.

Q. 2

Montrer que

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}.$$

et

$$\mathbb{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad si\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2 * \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{9.1}$$

Q. 1

Montrer que si α et $\boldsymbol{u}$ vérifient (9.1) alors

a. on a

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{9.2}$$

b. on a

$$\boldsymbol{a} - 2 \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{b} \tag{9.3}$$

c. on en déduit que

$$| \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle |^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{2} \tag{9.4}$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2

On suppose que $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)\ [\pi]$

a. Montrer que $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3

Soient α et $\boldsymbol{u}$ vérifiant (9.1). En déduire que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)\ [\pi]$ alors $\boldsymbol{u}$ est donné par

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2 \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}). \tag{9.5}$$

et $\|u\|_2 = 1$.

Exercice 10

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $\delta \in [\![0, 1]\!]$.

a. On suppose que $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, (i.e. $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ colinéaires). Exprimer $\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}$ en fonction de λ et $\boldsymbol{b}$.

b. Que peut-on dire si $\boldsymbol{a}$ est nul?

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* Householder *de paramètres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\delta \in [\![0,1]\!]$ retournant une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que*

- *si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,*
- *sinon α est le nombre complexe défini en **Q. 1** (dépendant de δ) et $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder*
$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}\|_2}\right)$$
telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$.

Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg(z) *(argument d'un nombre complexe),* eye(n) *(matrice identitée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

Q. 3 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* vecrand(n) *retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0,1[$ (loi uniforme).*

Q. 4 *Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.*

Exercice 11

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(a_1)} \boldsymbol{e}_1. \tag{11.1}$$

Exercice 12

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{12.1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.*

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{12.2}$$

Q. 3 *La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est-elle vérifiée pour tout $n \geqslant 2$? Justifier.*

Q. 4 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

b. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

c. *On suppose* $\mathbb{A}$ *inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une unique matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux strictement positifs telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

Exercice 13

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 *Expliciter, en fonction de* $\boldsymbol{v}$, *le vecteur* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, *tel que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 2 *Soient* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ *et* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. *On pose* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. *Déterminer* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ *en fonction de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ *et de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.

Q. 3 *On pose* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.

a. *Déterminer* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ *en fonction de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

b. *Que peut-on dire de particulier sur le bloc* $(2,2)$ *de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?

Exercice 14

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Expliquer comment construire une matrice* $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *unitaire, produit d'au plus* $n-1$ *matrices élémentaires de Householder, et,* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *triangulaire supérieure telles* $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$.

Q. 2 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction Householder *Exercice 10 Exercice 3.1.9 .*

Q. 3 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:*

- MatRand(m,n) *retournant une matrice aléatoire de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme* $[0,1]$.
- NormInf$(\mathbb{A})$ *retournant la norme infinie d'une matrice carrée* $\mathbb{A}$.

2 Exercices supplémentaires

Exercice 15 : Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Q. 1 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$. Montrer que cette factorisation est unique (sans citer le théorème du cours!)*

On pose

$$\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

Q. 2

a. *Déterminer $\mathbb{L}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ une matrice triangulaire supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$.*

b. *Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$.*

c. *Résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q. 3 *On peut noter que la matrice $\mathbb{A}$ est symétrique*

a. *Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t$, la matrice $\mathbb{L}$ étant celle de la question précédente.*

b. *Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

c. *En déduire que la matrice $\mathbb{A}$ est définie positive.*

Q. 4 *En déduire qu'il existe une matrice $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure à diagonale positive telle qur $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^t$.*

Exercice 16

Définition. *On dit que $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une* ***factorisation*** *$\mathbb{W}\mathbb{U}$ si il existe $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$* ***triangulaire inférieure inversible*** *et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$* ***triangulaire supérieure à diagonale unité*** *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}.$$

On note $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\mathbb{W} = (w_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{U} = (u_{i,j})_{i,j=1}^n$ les composantes de ces matrices.
On rappelle que la sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, $k \in [\![1, n]\!]$, est la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = a_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1, k]\!].$$

Q. 1 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

a. *Démontrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.*

b. *Démontrer que la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ est unique.*

c. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ à l'aide de la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$. Expliquer de manière détaillée une méthodologie pour calculer les coefficients des matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$. On explicitera les formules utilisées.*

Q. 3[Algo]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *admettant une factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

a. Ecrire la fonction ResTriSup *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est une matrice triangulaire supérieure inversible et* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

b. Ecrire la fonction algorithmique FactWU *retournant les matrices* $\mathbb{W}$ *et* $\mathbb{U}$.

c. On suppose la fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow \text{ResTriInf}(\mathbb{L}, \boldsymbol{b})$ *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *avec* $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *triangulaire inférieure inversible et* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$, *déjà écrite. Ecrire la fonction algorithmique* ResWU *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *en utilisant sa factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

On admet le résultat suivant:

Théorème. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *La matrice* $\mathbb{A}$ *admet une factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$ *si et seulement si toutes les sous-matrices principales de* $\mathbb{A}$ *sont inversibles.*

Q. 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *hermitienne définie positive.*

a. Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive.

b. Démontrer que $\mathbb{A}$ *est inversible.*

c. Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ *sont hermitiennes définies positives.*

d. En déduire que $\mathbb{A}$ *admet une unique factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$.