

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I*

Résolution de systèmes linéaires

Méthodes directes

Références

- [1] F. CUVELIER, *Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé*. fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf.
- [2] F. CUVELIER, *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*, Polycopié (téléchargement), 2025.
- [3] F. CUVELIER, *Analyse numérique I, rappels analyse et algèbre linéaire, résumé.*, 2025. fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/rappels_Algebre_Lineaire_2x1.pdf.

1 Exercices cours

EXERCICE 1 : Résolution système triangulaire supérieur

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1

Expliquer comment calculer $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de $\mathbf{x}$.

R. 1

On veut résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on peut calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$, car il est possible de calculer x_i si on connaît $x_{i+1}, \dots, x_n$: c'est la **méthode de remontée**. En effet, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mathbb{A}\mathbf{x})_i = b_i,$$

et donc, par définition d'un produit matrice-vecteur,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j = b_i.$$

Comme $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire supérieure, on a (voir Définition B.2.24 dans [2] et [3])

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j, A_{i,j} = 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j + A_{i,i}x_i + \sum_{j=i+1}^n A_{i,j}x_j \\ &= A_{i,i}x_i + \sum_{j=i+1}^n A_{i,j}x_j. \end{aligned} \tag{R1.1}$$

Q. 2

Ecrire la fonction **ResTriSup** permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

R. 2

Algorithme 1 $\mathcal{R}_0$

- 1: Résoudre $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en calculant successivement $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

- 1: **Pour** $i \leftarrow n$ à 1 **faire**(pas de -1)
 2: calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \dots, x_n$
 à l'aide de l'équation (R1.1)
 3: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

- 1: **Pour** $i \leftarrow n$ à 1 **faire**(pas de -1)
 2: Calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \dots, x_n$
 à l'aide de l'équation (R1.1)
 3: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

- 1: **Pour** $i \leftarrow n$ à 1 **faire**(pas de -1)
 2: $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^n A_{i,j}x_j$
 3: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
 4: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

- 1: **Pour** $i \leftarrow n$ à 1 **faire**(pas de -1)
 2: $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^n A_{i,j}x_j$
 3: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
 4: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_3$

- 1: **Pour** $i \leftarrow n$ à 1 **faire**(pas de -1)
 2: $S \leftarrow 0$
 3: **Pour** $j \leftarrow i+1$ à n **faire**
 4: $S \leftarrow S + A(i, j) * x(j)$
 5: **Fin Pour**
 6: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
 7: **Fin Pour**

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 1 Fonction **ResTriSup** permettant de résoudre le système linéaire triangulaire supérieur inversible $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supérieure inversible.
 $\mathbf{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Résultat : $\mathbf{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

- 1: **Fonction** $\mathbf{x} \leftarrow \text{ResTriSup}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$
 2: **Pour** $i \leftarrow n$ à 1 **faire**(pas de -1)
 3: $S \leftarrow 0$
 4: **Pour** $j \leftarrow i+1$ à n **faire**
 5: $S \leftarrow S + A(i, j) * x(j)$
 6: **Fin Pour**
 7: $x(i) \leftarrow (b(i) - S)/A(i, i)$
 8: **Fin Pour**
 9: **Fin Fonction**

EXERCICE 2 : Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j .

Q. 1

Représenter cette matrice et la définir proprement.

R. 1

On note, dans toute la correction, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
On peut définir cette matrice par ligne,

$$\begin{cases} \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, & P_{r,s} = \delta_{r,s}, & \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{i,s} = \delta_{j,s}, & \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{j,s} = \delta_{i,s}, & \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases}$$

ou par colonne

$$\begin{cases} \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, & P_{r,s} = \delta_{r,s}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{r,i} = \delta_{r,j}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & P_{r,j} = \delta_{r,i}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases}$$



Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique. Pour la représentation, on suppose $i < j$. On effectue une représentation bloc 5×5 avec des blocs diagonaux carrés sachant que tous les blocs non décrits sont nuls:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbb{I}} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \boxed{\mathbb{I}} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \boxed{\mathbb{I}} \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the block structure of the matrix $\mathbb{P}$ of size $n \times n$. The matrix is partitioned into blocks of size $(i-1) \times (i-1)$, $(i-1) \times (j-i-1)$, $(i-1) \times (n-j)$, $(j-i-1) \times (i-1)$, $(j-i-1) \times (j-i-1)$, $(j-i-1) \times (n-j)$, $(n-j) \times (i-1)$, $(n-j) \times (j-i-1)$, and $(n-j) \times (n-j)$. The blocks are arranged in a 5×5 grid. The blocks on the main diagonal are identity matrices $\mathbb{I}$. The blocks at positions $(2,4)$ and $(4,2)$ are 0 and 1 respectively. The blocks at positions $(2,2)$ and $(4,4)$ are 1 and 0 respectively. The blocks at positions $(2,3)$ and $(4,3)$ are 1 and 0 respectively. The blocks at positions $(3,2)$ and $(3,4)$ are 0 and 1 respectively. The blocks at positions $(3,1)$ and $(3,5)$ are 0 and 1 respectively. The blocks at positions $(1,2)$ and $(1,4)$ are 0 and 1 respectively. The blocks at positions $(1,1)$ and $(1,5)$ are 1 and 0 respectively. The blocks at positions $(5,2)$ and $(5,4)$ are 0 and 1 respectively. The blocks at positions $(5,1)$ and $(5,5)$ are 1 and 0 respectively.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{A}_{r,:}$ le r -ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\mathbf{A}_{:,s}$ le s -ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2

- Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]} \mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.
- Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A} \mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.

R. 2

- On note $\mathbb{D} = \mathbb{P} \mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^n P_{r,k} A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{cases} D_{r,s} = \sum_{k=1}^n \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ D_{i,s} = \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{r,:} = \mathbf{A}_{r,:}, & \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{D}_{i,:} = \mathbf{A}_{j,:}, \\ \mathbf{D}_{j,:} = \mathbf{A}_{i,:}. \end{cases}$$

Note: La notation $\mathbf{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1}, \dots, D_{i,n})$ et $\mathbf{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$$

b. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{k,s} = \sum_{k=1}^n A_{r,k} P_{s,k}.$$

 Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{cases} E_{r,s} &= \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ E_{r,i} &= \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} &= \sum_{k=1}^n A_{r,k} \delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{:,s} &= \mathbf{A}_{:,s}, \quad \forall s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \\ \mathbf{E}_{:,i} &= \mathbf{A}_{:,j}, \\ \mathbf{E}_{:,j} &= \mathbf{A}_{:,i}. \end{cases}$$

Q. 3

- Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
- Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

R. 3

- $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.
- Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

EXERCICE 3 : Matrice d'élimination

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.1)$$

Q. 1

- Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.
- Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

R. 1

- La matrice $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (Proposition B.2.8 de [2]) On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}) = 1$.
- Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array} \right)$$

avec $\mathbf{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^t \in \mathbb{C}^{n-1}$. On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline \mathbf{c} & \mathbb{D} \end{array} \right)$$

avec $a \in \mathbb{C}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{X} &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \hline \mathbf{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline \mathbf{c} & \mathbb{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 \times a & 1 \times \mathbf{b}^* + \mathbf{0}_{n-1}^t \times \mathbb{D} \\ \hline \mathbf{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbf{c} & \mathbf{e} \times \mathbf{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline a\mathbf{e} + \mathbf{c} & \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^* \\ \hline a\mathbf{e} + \mathbf{c} & \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^t \\ \hline \mathbf{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{0}_{n-1}^t, \quad a\mathbf{e} + \mathbf{c} = \mathbf{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}\mathbf{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{n-1}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline -\mathbf{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline \mathbf{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right) = \mathbb{I}_n.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\mathbf{A}_{:,j}$ le j -ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\mathbf{A}_{i,:}$ son i -ème vecteur ligne. On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{:,1}$.

Q. 2

a. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.

b. En déduire que la première colonne de $\mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]} \mathbb{A}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]} \mathbb{A} \mathbf{e}_1 = A_{1,1} \mathbf{e}_1 \tag{3.2}$$

où $\mathbf{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

R. 2

a. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\mathbf{A}_1]}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{A}_1$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^n E_{i,k} A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \iff \tilde{\mathbf{A}}_{1,:} = \mathbf{A}_{1,:}. \tag{R3.2}$$

Pour $i \geq 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On obtient alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^n E_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + \sum_{k=2}^n \delta_{i,k} A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1} A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,j}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \iff \tilde{\mathbf{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1} \mathbf{A}_{1,:} + \mathbf{A}_{i,:} \quad (\text{R3.3})$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,:} \\ \hline \mathbf{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\mathbf{A}_{1,:} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\mathbf{A}_{1,:} \end{pmatrix}$$

- b. De (R3.2), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (R3.3) on obtient pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbf{A}}$ est $(1, 0, \dots, 0)^t$.

EXERCICE 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1

Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\mathbf{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

R. 1

D'après le Lemme 3.1.1 de [2]/Lemme 2.2 de [1], si $A_{1,1} \neq 0$, le résultat est immédiat. Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice $\mathbf{A}$ est inversible, il existe au moins un $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $A_{p,1} \neq 0$. On peut même choisir le premier indice p tel que $|A_{p,1}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |A_{i,1}| > 0$ (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[1,p]}$ la matrice de permutation des lignes 1 et p (voir Lemme 3.1.2 de [2]/Lemme 2.1 de [1]). On a alors

$$|\det \mathbb{P}| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}.$$

Par construction $(\mathbb{P}\mathbf{A})_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$, et on peut alors appliquer le Lemme 3.1.1 de [2]/Lemme 2.2 de [1] à la matrice $(\mathbb{P}\mathbf{A})$ pour obtenir l'existence d'une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det \mathbb{E} = 1$ et telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}\mathbf{A})\mathbf{e}_1 = A_{p,1}\mathbf{e}_1.$$

En posant $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{P}$ et $\alpha = A_{p,1}$, on obtient bien $\mathbb{G}\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$. De plus, on a

$$|\det \mathbb{G}| = |\det(\mathbb{E}\mathbb{P})| = |\det \mathbb{E} \times \det \mathbb{P}| = 1.$$

Remarque. La matrice $\mathbb{G}$ étant inversible, on a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbb{G}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbb{G}\mathbf{b}$$

ce qui correspond à la première permutation/élimination de l'algorithme de Gauss-Jordan.

Q. 2

- a. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbf{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbf{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbf{S}_n| = 1$ et $\mathbf{S}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{U}_n$ avec $\mathbf{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.
- b. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décomposition précédente $\mathbf{S}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

R. 2

- a. On veut démontrer, par récurrence sur $n \geq 2$, la propriété suivante

$(\mathcal{P}_n)$

$\forall \mathbf{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\exists \mathbf{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\det \mathbf{S}_n| = 1$, tel que la matrice $\mathbf{U}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}_n\mathbf{A}_n$ soit une triangulaire supérieure inversible.

Initialisation : Pour $n = 2$. Soit $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

telle que $|\det \mathbb{G}_2| = 1$ et $\mathbb{G}_2 \mathbb{A}_2 \mathbf{e}_1 = \alpha \mathbf{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\mathbf{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2 \mathbb{A}_2$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices $\mathbb{G}_2$ et $\mathbb{A}_2$ étant inversible, leur produit $\mathbb{U}_2$ l'est aussi. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est donc vérifiée avec $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$.

Hérédité : Soit $n \geq 3$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et $\mathbb{G}_n \mathbb{A}_n \mathbf{e}_1 = \alpha_n \mathbf{e}_1$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\mathbf{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n \mathbb{A}_n$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

où $\mathbf{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{G}_n$ et $\mathbb{A}_n$ sont inversibles, $\mathbb{V}_n$ l'est aussi. On en déduit donc que $\mathbb{B}_{n-1}$ est inversible car $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$ et $\alpha_n \neq 0$.

On peut donc utiliser la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ (hyp. de récurrence) sur la matrice $\mathbb{B}_{n-1}$: il existe donc $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, avec $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1} \mathbb{B}_{n-1}$ soit une triangulaire supérieure inversible. Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_n \mathbb{G}_n \mathbb{A}_n &= \mathbb{Q}_n \mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} \mathbb{B}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \mathbf{c}_{n-1}^* & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{U}_n$ est triangulaire supérieure inversible car $\mathbb{U}_{n-1}$ l'est aussi et $\alpha_n \neq 0$.

On pose $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n \mathbb{G}_n$. On a donc

$$\mathbb{S}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n.$$

De plus, comme on a $\det \mathbb{S}_n = \det \mathbb{Q}_n \times \det \mathbb{G}_n$, et $\det \mathbb{Q}_n = \det \mathbb{S}_{n-1}$, on obtient, en utilisant $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et l'hypothèse de récurrence $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, que

$$|\det \mathbb{S}_n| = 1.$$

Ceci prouve la véracité de la proposition $(\mathcal{P}_n)$.

b. Comme $\mathbb{S}_n$ est inversible, on a en multipliant à gauche le système par $\mathbb{S}_n$

$$\mathbb{A}_n \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbb{S}_n \mathbb{A}_n \mathbf{x} = \mathbb{S}_n \mathbf{b} \iff \mathbb{U}_n \mathbf{x} = \mathbb{S}_n \mathbf{b}$$

Pour déterminer le vecteur $\mathbf{x}$, on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

Q. 3

Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?

R. 3

Si $\mathbb{A}$ est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir $\alpha \neq 0$. Cependant l'existence de la matrice $\mathbb{G}$ reste avérée.

Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice $\mathbb{U}_n$ n'est plus inversible.

EXERCICE 5 : Vers la factorisation LU

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i , notées Δ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Correction Soit $n \geq 2$, on va démontrer par récurrence sur n la proposition suivante

($\mathcal{P}_n$)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i , sont inversibles, alors il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Initialisation: $n = 2$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $\Delta_1 = A_{1,1} \neq 0$ et $\Delta_2 = \mathbb{A}$ inversible. On va construire une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ E_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}$$

On a donc $U_{2,1} = 0 = E_{2,1}A_{1,1} + A_{2,1}$. Comme par hypothèse, $A_{1,1} \neq 0$, on a $E_{2,1} = -A_{2,1}/A_{1,1}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_{1,1} &= A_{1,1} = \det(\Delta_1), \\ U_{2,2} &= A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} = \frac{A_{2,2}A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}} = \frac{\det \mathbb{A}}{U_{1,1}} = \frac{\det \Delta_2}{U_{1,1}}. \end{aligned}$$

Hérédité: Soit $n \geq 3$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont toutes les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont inversibles. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{g} \\ \hline \mathbf{f}^* & A_{n,n} \end{array} \right)$$

avec $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{n-1}$. Comme les $n-1$ premières sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont les $n-1$ sous-matrices principales de $\mathbb{A}_{n-1}$, ces dernières sont, par hypothèse, inversibles. Par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{A}_{n-1}$, il existe une matrice $\mathbb{E}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure.

On va construire (si possible) une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{E}$ s'écrit sous forme bloc

$$\mathbb{E} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{h}^* & 1 \end{array} \right)$$

avec $\mathbb{X}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{n-1}$.

On a alors

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{h}^* & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{g} \\ \hline \mathbf{f}^* & A_{n,n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{X}_{n-1}\mathbf{g} \\ \hline \mathbf{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \mathbf{f}^* & \mathbf{h}^*\mathbf{g} + A_{n,n} \end{array} \right)$$

Pour que la matrice $\mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure, il faut que $\mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure et $\mathbf{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \mathbf{f}^* = 0$. En choisissant $\mathbb{X}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}$, on a $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{A}_{n-1}$ étant inversible, on a $\mathbf{h}^* = -\mathbf{f}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{h}^* & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \mathbf{g} \\ \hline \mathbf{f}^* & A_{n,n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{n-1} & \mathbb{E}_{n-1}\mathbf{g} \\ \hline 0 & A_{n,n} - \mathbf{h}^*\mathbf{g} \end{array} \right) = \mathbb{U}.$$

On a donc construit une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, $\mathbb{E}$, telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. Par construction, on a

$$U_{i,j} = (\mathbb{U}_{n-1})_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2$$

et donc, par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{U}_{n-1}$, on obtient

$$U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1}), \quad \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

De plus on a,

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{E}\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{E}) \det(\mathbb{A}) \\ &= \det(\mathbb{A}) && \text{car } \mathbb{E} \text{ tri. inf. à diag. unité} \\ &= \det(\Delta_n). && \text{car } \Delta_n = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{U}) &= \prod_{k=1}^n U_{k,k} && \text{car } \mathbb{U} \text{ tri. sup.} \\ &= U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k} \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$, on en déduit que la matrice $\mathbb{U}$ est inversible (car $\mathbb{E}$ et $\mathbb{A}$ le sont), que ses coefficients sont non nuls et, en prenant le déterminant:

$$\det(\Delta_n) = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}$$

et donc

$$U_{n,n} = \frac{\det(\Delta_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}}.$$

La proposition ($\mathcal{P}_n$) est donc vraie.

Conclusion: On a démontré par récurrence que la proposition ($\mathcal{P}_n$) est vraie pour tout $n \geq 2$.

◇

EXERCICE 6 : factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Montrer que s'il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

R. 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

La matrice $\mathbb{A}$ est alors hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*)^* = (\mathbb{L}^*)^* \mathbb{D}^* \mathbb{L}^* = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

De plus $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbb{L}^*\mathbf{x} \rangle$$

On pose $\mathbf{y} = \mathbb{L}^*\mathbf{x} \neq 0$ car $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^*$ inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n D_{i,i} |y_i|^2 > 0$$

car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbf{y} \neq 0$.

La matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

Q. 2

Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.

R. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.

D'après le Corollaire 3.1.1 de [2]/Corollaire 2.6 de [1], la matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

D'après le Théorème 3.1.6 de [2]/Théorème 2.8 de [1], la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ peut alors s'écrire sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ où $\mathbb{D}$ est diagonale à coefficients réels et $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité.

Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$. Or on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbb{L}^*\mathbf{x} \rangle$$

On note $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on rappelle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle \mathbb{D}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En choisissant $\mathbf{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1}\mathbf{e}_i \neq 0$, on obtient alors

$$\langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\mathbf{x}, \mathbb{L}^*\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = D_{i,i} > 0.$$

EXERCICE 7 : factorisation de Cholesky

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Montrer que si $\mathbb{A}$ admet une factorisation régulière de Cholesky alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

R. 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ avec $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.

La matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}\mathbb{B}^*)^* = (\mathbb{B}^*)^*\mathbb{B}^* = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{A}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{B}^*\mathbf{x}, \mathbb{B}^*\mathbf{x} \rangle = \|\mathbb{B}^*\mathbf{x}\|^2 > 0$$

car $\mathbb{B}^*\mathbf{x} \neq 0$ ($\mathbb{B}^*$ inversible et $\mathbf{x} \neq 0$). Donc la matrice $\mathbb{A}$ est bien hermitienne définie positive.

Q. 2

Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation régulière de Cholesky.

R. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.

D'après le Corollaire 3.1.2 de [2]/Corollaire 2.9 de [1], il existe alors une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm\sqrt{D_{i,i}} \neq 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice $\mathbb{B}$ est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Q. 3

On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

a. Montrer que $\mathbb{A}$ admet une factorisation positive de Cholesky.

b. Montrer que cette factorisation est unique.

R. 3

a. En choisissant, dans la question précédente,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad H_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}} > 0,$$

la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$ triangulaire inférieure a alors pour éléments diagonaux

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad B_{i,i} = H_{i,i} > 0.$$

b. Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique. On propose ici deux démonstrations.

• **1ère démonstration.**

Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1 \mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2 \mathbb{B}_2^*.$$

En multipliant à gauche par $\mathbb{B}_2^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

$$\mathbb{B}_2^{-1} \mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^* (\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^* (\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1} \mathbb{B}_2)^*$$

En notant $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}_2^{-1} \mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

$$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \quad (\text{R7.4})$$

Or, on a

- Proposition B.2.8 de [2]: l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
- Proposition B.2.7 de [2]: le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

On en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1} \mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1} \mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

De plus l'équation (R7.4) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{G}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on en déduit

$$(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\mathbb{G}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

De l'équation (R7.4), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$ et donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{G}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

On en déduit alors que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$ et donc

$$\mathbb{B}_2^{-1} \mathbb{B}_1 = \mathbb{I}$$

c'est à dire $\mathbb{B}_2^{-1}$ est l'inverse de $\mathbb{B}_1$ qui est unique, donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

• **2ème démonstration.**

Soient $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \mathbb{B}^* = \mathbb{C} \mathbb{C}^*.$$

En multipliant à gauche par $\mathbb{C}^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}^*)^{-1}$ cette équation, on obtient

$$\mathbb{C}^{-1} \mathbb{B} = \mathbb{C}^* (\mathbb{B}^*)^{-1} = \mathbb{C}^* (\mathbb{B}^{-1})^* = (\mathbb{B}^{-1} \mathbb{C})^* \quad (\text{R7.5})$$

Or, on a

- Proposition B.2.8 de [2]: Soit $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible (ses coefficients diagonaux sont non nuls). Son inverse est aussi triangulaire inférieure et, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{T}_{i,i}^{-1} = \frac{1}{\mathbb{T}_{i,i}}$.
On en déduit que les matrices $\mathbb{B}^{-1}$ et $\mathbb{C}^{-1}$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
- Proposition B.2.7 de [2]: Soient $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires inférieures. Alors $\mathbb{T}\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure et, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\mathbb{T}\mathbb{L})_{i,i} = \mathbb{T}_{i,i} \mathbb{L}_{i,i}$.
On en déduit que les matrices $\mathbb{C}^{-1} \mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^{-1} \mathbb{C}$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

De plus l'équation (R7.5) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs. On en déduit, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B})_{i,i} = ((\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*)_{i,i} \Leftrightarrow \mathbb{C}_{i,i}^{-1}\mathbb{B}_{i,i} = \overline{\mathbb{B}_{i,i}^{-1}\mathbb{C}_{i,i}}$$

Comme les coefficients diagonaux sont réels, on obtient

$$\mathbb{C}_{i,i}^{-1}\mathbb{B}_{i,i} = \mathbb{B}_{i,i}^{-1}\mathbb{C}_{i,i}$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{B}_{i,i}^2 = \mathbb{C}_{i,i}^2.$$

Or les coefficients diagonaux sont strictement positifs donc, on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{B}_{i,i} = \mathbb{C}_{i,i}.$$

On en déduit que les coefficients diagonaux des matrices diagonales $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ et $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*$ vérifient

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B})_{i,i} = ((\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*)_{i,i} = 1.$$

Elles s'identifient donc à la matrice identité et on a alors $\mathbb{B} = \mathbb{C}$. Ce qui démontre l'unicité.

EXERCICE 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*.$$

Q. 1

a. Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.

b. Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.

R. 1

a. Cette matrice est hermitienne car

$$\mathbb{H}^* = (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2(\mathbf{u}\mathbf{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^* = \mathbb{H}.$$

b. La matrice $\mathbb{H}$ est unitaire si $\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^*\mathbb{H} &= \mathbb{H}\mathbb{H} = (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)(\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*) \\ &= \mathbb{I} - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^* + 4\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{u}\mathbf{u}^*. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|_2^2 = 1$ et donc

$$\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I} - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^* + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{u})\mathbf{u}^* = \mathbb{I}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\mathbf{x}_{\parallel} = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$ et $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$.

Q. 2

Montrer que

$$\mathbb{H}(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}_{\parallel}) = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

et

$$\mathbb{H}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{si } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

R. 2

On note que par construction $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_{\perp} \rangle = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_{\perp} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_{\parallel} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{u}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= 0 \quad \text{car } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|_2^2 = 1. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\mathbf{u})(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel) &= (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel) = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - 2\mathbf{u} \underbrace{\mathbf{u}^*\mathbf{x}_\perp}_{=0} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{x}_\parallel \\
&= \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}) = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} \underbrace{\mathbf{u}^*\mathbf{u}}_{=1} \\
&= \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel - 2\mathbf{x}_\parallel \\
&= \mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_\parallel.
\end{aligned}$$

Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0$ alors $\mathbf{x}_\parallel = 0$ et $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp$.

EXERCICE 9

Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2 * \mathbf{u}^*\mathbf{u} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \quad (9.1)$$

Q. 1

Montrer que si α et $\mathbf{u}$ vérifient (9.1) alors

a. on a

$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad (9.2)$$

b. on a

$$\mathbf{a} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} = \alpha\mathbf{b} \quad (9.3)$$

c. on en déduit que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \quad (9.4)$$

R. 1

Par la suite, on pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{u})$ pour alléger les notations.

a. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a}\|_2^2 &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbb{H}^* \mathbb{H} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire} \\
&= \langle \mathbb{H} \mathbf{a}, \mathbb{H} \mathbf{a} \rangle \quad \text{par définition du produit scalaire} \\
&= \|\mathbb{H} \mathbf{a}\|_2^2 = \|\alpha\mathbf{b}\|_2^2 = |\alpha|^2 \|\mathbf{b}\|_2^2 = |\alpha|^2.
\end{aligned}$$

b. Pour établir (9.3), on écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} \\
&\iff \mathbf{a} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{b} \\
&\iff \mathbf{a} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} = \alpha\mathbf{b}
\end{aligned}$$

c. En effectuant le produit scalaire (à gauche) avec $\mathbf{a}$ de (9.3), on obtient

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

ce qui prouve (9.4).

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2

On suppose que $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \in [\pi]$

a. Montrer que $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

R. 2

a. On a par définition de l'argument $\alpha = |\alpha|e^{i \arg \alpha}$ et $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|e^{i \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)}$ ce qui donne

$$\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\alpha| |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| e^{i(\arg \alpha + \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle))} \quad (\text{R9.6})$$

et donc $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ est réel si $\arg \alpha + \arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = 0 \pmod{\pi}$.

b. On vient de démontrer que $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ et donc $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$.

- Si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \pi \pmod{2\pi}$, alors de (R9.6) on obtient $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq 0$ et donc $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq \|\mathbf{a}\|_2^2 > 0$ car $\mathbf{a} \neq 0$.

- Si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \pmod{2\pi}$, alors de (R9.6) on obtient $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq 0$.

Comme les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2.$$

On obtient donc

$$0 \leq \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq |\alpha| |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < |\alpha| \|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2^2$$

Attention, dans ce cas $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ peut-être très petit.

Q. 3

Soient α et $\mathbf{u}$ vérifiant (9.1). En déduire que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \pmod{\pi}$ alors $\mathbf{u}$ est donné par

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle} (\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}). \quad (9.5)$$

et $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

R. 3

On peut noter que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \neq 0$ car sinon, d'après (9.3), $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ or par hypothèse $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont non colinéaires. On obtient alors immédiatement (9.5) à partir de (9.3)

Vérifions que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. On a

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{4|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2} \langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}, \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \rangle$$

En utilisant (9.4), on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 &= 2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) \\ &= 2\|\mathbf{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}, \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\alpha|^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|_2^2 - \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + |\alpha|^2 \\ &= 2\|\mathbf{a}\|_2^2 - \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ &= 2\|\mathbf{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad \text{car } \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \overline{(\bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle)} = \bar{\alpha} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

EXERCICE 10

Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$.

Q. 1

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ et $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $\delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$.

a. On suppose que $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, (i.e. $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ colinéaires). Exprimer $\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}$ en fonction de λ et $\mathbf{b}$.

b. Que peut-on dire si $\mathbf{a}$ est nul?

R. 1

a. On a

$$\|\mathbf{a}\|_2 = |\lambda| \|\mathbf{b}\|_2 = |\lambda|$$

et

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \lambda.$$

On rappelle que $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = \overline{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$ et, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$. On a alors

$$\begin{aligned}\arg(\alpha) &= -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\lambda) + \delta\pi.\end{aligned}$$

On a alors

- avec $\delta = 0$,

$$\alpha = |\alpha|e^{i\arg(\alpha)} = |\lambda|e^{i\arg(\lambda)} = \lambda$$

ce qui donne

$$\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

- avec $\delta = 1$,

$$\alpha = |\alpha|e^{i\arg(\alpha)} = |\lambda|e^{i(\arg(\lambda)+\pi)} = -\lambda$$

$$\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = 2\lambda\mathbf{b}.$$

b. Si $\mathbf{a}$ est nul, on a $\alpha = 0$ et $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Q. 2

Ecrire la fonction algorithmique **Householder** de paramètres $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$ retournant une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\mathbf{a} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (i.e. $\mathbf{a}$ nul ou colinéaire à $\mathbf{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identité et $\alpha = 0$,
- sinon α est le nombre complexe défini en **Q. 1** (dépendant de δ) et $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)$$

telle que $\mathbb{S}\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$.

Des fonctions comme **dot**($\mathbf{a}, \mathbf{b}$) (produit scalaire de deux vecteurs), **norm**($\mathbf{a}$) (norme 2 d'un vecteur), **arg**(z) (argument d'un nombre complexe), **eye**(n) (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), **matprod**($\mathbb{A}, \mathbb{B}$) (produit de deux matrices), **ctranspose**($\mathbb{A}$) (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

R. 2

Algorithme 2 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta)$.

Retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\mathbf{a} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = 0$ (i.e. $\mathbf{a}$ nul ou colinéaire à $\mathbf{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identité et $\alpha = 0$,
- sinon α est le nombre complexe défini par

$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg(\alpha) = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi,$$

et, $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H} \left(\frac{\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}\|_2} \right)$$

telle que $\mathbb{S}\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$.

Données : $\mathbf{a}, \mathbf{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.

δ : 0 ou 1, permet de déterminer α .

Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

α : nombre complexe, de module $\|\mathbf{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$.

```

1: Fonction  $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta)$ 
2:    $\text{ba} \leftarrow \text{dot}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$   $\triangleright \text{dot}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) : \mathbf{b}^* \mathbf{a}$ 
3:   Si  $\text{norm}(\mathbf{a} - \text{ba} * \mathbf{b}) < 1e - 15$  alors
4:      $\mathbb{S} \leftarrow \text{eye}(n)$ ,  $\alpha \leftarrow 0$ 
5:   Sinon
6:      $\alpha \leftarrow \text{norm}(\mathbf{a}) * \exp(i * (\delta * \pi + \arg(\text{ba})))$ 
7:      $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}$ 
8:      $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} / \text{norm}(\mathbf{u})$ 
9:      $\mathbb{S} \leftarrow \text{eye}(n) - 2 * \text{matprod}(\mathbf{u}, \text{ctranspose}(\mathbf{u}))$ 
10:   Fin Si
11: Fin Fonction
```

Q. 3

Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction `vecrand(n)` retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).

R. 3

```

1:  $n \leftarrow 100$ 
2:  $\mathbf{a} \leftarrow \text{vecrand}(n)$ 
3:  $\mathbf{b} \leftarrow \text{vecrand}(n)$ 
4:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{norm}(\mathbf{b}, 2)$ 
5:  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$ 
6:  $\text{error} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H} * \mathbf{a} - \alpha * \mathbf{b}, 2)$ 
```

Q. 4

Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.

R. 4

Ici, l'objectif est d'illustrer le fait qu'avec $\mathbf{a}$ presque colinéaire à $\mathbf{b}$, on a (voir **Q. 1**)

- si $\delta = 1$, alors $\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \approx 2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b}$
- si $\delta = 0$, alors $\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b} \approx \mathbf{0}$ et ceci est source d'ennuis numériques (précision machine) lors du calcul du vecteur

$$\frac{\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}\|_2}.$$

```

1:  $n \leftarrow 100$ 
2:  $\mathbf{b} \leftarrow \text{vecrand}(n)$ 
3:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} / \text{norm}(\mathbf{b}, 2)$ 
4:  $\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{b} + \text{tol} * \text{vecrand}(n)$ 
```

```

5:  $[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{Householder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 1)$ 
6:  $[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{Householder}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, 0)$ 
7:  $\text{error0} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_0 * \mathbf{a} - \alpha_0 * \mathbf{b}, 2) / (1 + \text{abs}(\alpha_0))$ 
8:  $\text{error1} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_1 * \mathbf{a} - \alpha_1 * \mathbf{b}, 2) / (1 + \text{abs}(\alpha_1))$ 

```

Dans la figure qui suit, on représente en échelle logarithmique, et, en fonction de l'ordre des matrices, l'erreur obtenue avec $\delta = 1$, $\delta = 0$ et $\text{tol} = 1e - 12$ lors de l'utilisation de la fonction `Householder` avec un vecteur $\mathbf{a}$ presque colinéaire à $\mathbf{b}$. En Figure 2, la représentation est faite avec $\text{tol} = 1e - 6$.

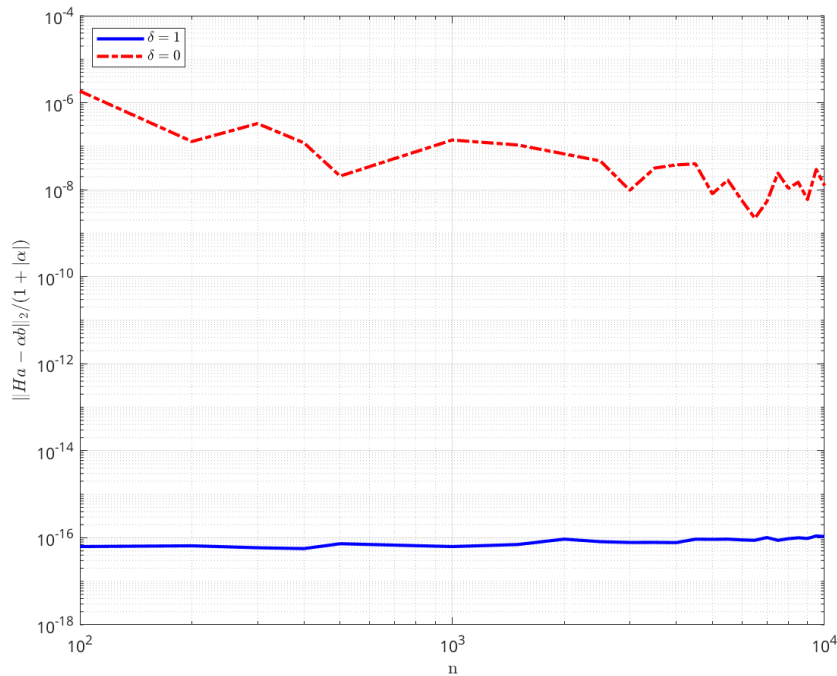


Figure 1: Choix de α dans `Householder` : erreur relative en norme L_2 avec $\text{tol} = 1e - 12$

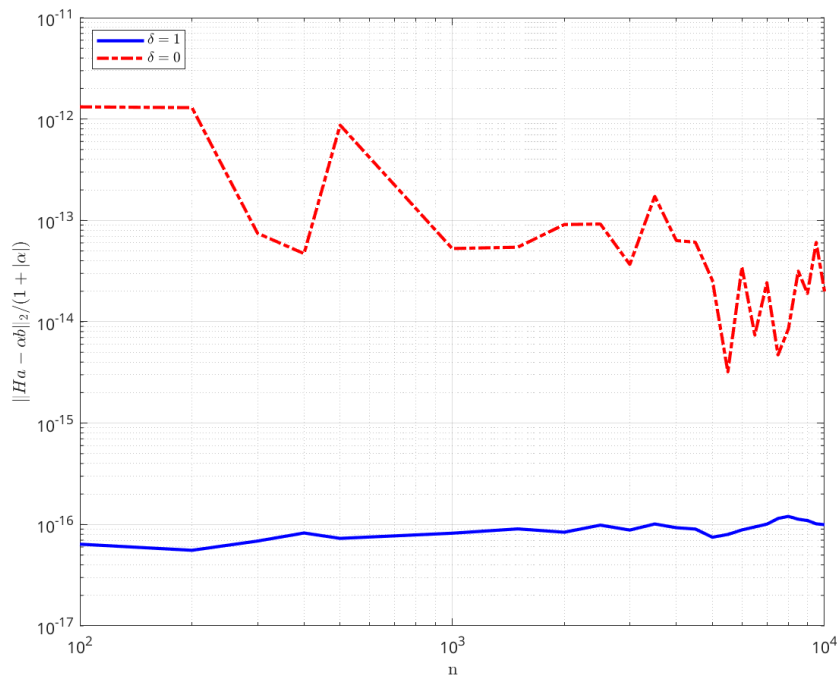


Figure 2: Choix de α dans `Householder` : erreur relative en norme L_2 avec $\text{tol} = 1e - 6$

EXERCICE 11

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à $\mathbf{e}_1$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1. \quad (11.1)$$

Correction Avec $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$, on est sous les conditions du théorème 3.1.8 de [2]/théorème 2.15 de [1]. On définit alors $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \delta\pi, \quad \text{avec } \delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket.$$

On a donc

$$\arg \alpha = -\arg(\overline{a_1}) + \delta\pi = \arg(a_1) + \delta\pi.$$

le choix $\delta = 1$ étant numériquement préférable (voir Exercice ...) Le théorème permet alors d'affirmer que

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} &= \mathbf{a} - |\alpha| e^{i \arg(\alpha)} \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|_2 e^{i(\arg(a_1) + \delta\pi)} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Avec le choix $\delta = 1$, on obtient

$$\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = \mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1.$$

On obtient alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1\|_2}\right)\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1$$

◇

EXERCICE 12

Soit $n \geq 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \quad (12.1)$$

Q. 1

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (\mathcal{P}_n)$ est vraie.

R. 1

- **Initialisation** : on va montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{a} = \mathbb{A}_{:,1}$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbf{b} = (1, 0)^\top$.

- Si $\mathbf{a} \neq 0$ et si $\mathbf{a}$ non colinéaire à $\mathbf{b}$, on est sous les conditions du théorème 3.1.8 de [2]/théorème 2.15 de [1]. On définit alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}.$$

On pose $\mathbb{U} = \mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.

- Si $\mathbf{a} = 0$ ou si $\mathbf{a}$ est colinéaire à $\mathbf{b}$, alors $\mathbf{a}_2 = \mathbb{A}_{2,1} = 0$ et on pose $\mathbb{U} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \mathbf{a}_1 (= \mathbb{A}_{1,1})$.

Dans les 2 cas, on obtient

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{U}(\mathbb{A}_{:,1} \mid \mathbb{A}_{:,2}) = (\mathbb{U}\mathbb{A}_{:,1} \mid \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2}) = (\alpha\mathbf{b} \mid \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2}) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure et la matrice $\mathbb{U}$ est soit l'identité, soit une matrice élémentaire de Householder.

- **Hérédité** : soit $n \geq 2$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée, on va alors montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{a} = \mathbb{A}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$, premier vecteur de la base canonique ($\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{b}_i = \delta_{1,i}$).

- Si $\mathbf{a} \neq 0$ et si $\mathbf{a}$ non colinéaire à $\mathbf{b}$, on est sous les conditions du théorème 3.1.8 de [2]/théorème 2.15 de [1]. On définit alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a

$$\mathbb{H} \left(\frac{\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}\|_2} \right) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}.$$

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H} \left(\frac{\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}\|_2} \right)$ qui est une matrice unitaire.

- Si $\mathbf{a} = 0$ ou si $\mathbf{a}$ est colinéaire à $\mathbf{b}$, alors $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\mathbf{a}_i = \mathbb{A}_{i,1} = 0$. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \mathbf{a}_1 (= \mathbb{A}_{1,1})$.

Dans les 2 cas, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{A} &= \mathbb{H} \left(\mathbb{A}_{:,1} \mid \mathbb{A}_{:,2} \mid \dots \mid \mathbb{A}_{:,n} \right) = \left(\mathbb{H}\mathbb{A}_{:,1} \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} \mid \dots \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n} \right) \\ &= \left(\alpha \mathbf{e}_1 \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} \mid \dots \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{H}\mathbb{A}$ s'écrit aussi sous la forme

$$\mathbb{H}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{A}_{n-1} & \end{array} \right)$$

où $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On peut donc appliquer à $\mathbb{A}_{n-1}$ l'hypothèse de récurrence: $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\exists \mathbb{R}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{U}_{n-1} \mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}.$$

On définit alors

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{U}_{n-1} & \end{array} \right).$$

On a

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{U}_{n-1} & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{U}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}^* & \end{array} \right)$$

Comme $\mathbb{U}_{n-1}$ est unitaire, on en déduit que $\mathbb{U}$ est aussi unitaire. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\mathbb{H}\mathbb{A}) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{U}_{n-1} & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{A}_{n-1} & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{U}_{n-1} \mathbb{A}_{n-1} & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbb{R}_{n-1} & \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}_{n-1}$ est triangulaire supérieure, on en déduit que $\mathbb{R}_n$ est aussi triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}\mathbb{H}$. Cette matrice est unitaire, car produit de deux matrices unitaires, et on a

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A} = \mathbb{R}_n.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée.

- **Conclusion** : on vient de démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Q. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

R. 2

D'après la proposition $(\mathcal{P}_n)$, Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^{-1}$ et donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^*$, qui est unitaire, on obtient le résultat demandé.

(Q_n)

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \quad (12.2)$$

Q. 3

La proposition (Q_n) est-elle vérifiée pour tout $n \geq 2$? Justifier.

R. 3

La proposition (Q_n) est toujours vérifiée. En effet, en reprenant la démonstration par récurrence dans le cas complexe, on peut noter que toutes les matrices sont réelles y compris les matrices de Householder utilisées car les coefficients α sont nécessairement réels ($\arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \delta\pi = \delta\pi$), et Les matrices unitaires réelles sont orthogonales.

Q. 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

b. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

c. On suppose $\mathbb{A}$ inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

R. 4

a. D'après la proposition (Q_n) , Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est orthogonale, on a $\mathbb{U}^t = \mathbb{U}^{-1}$ et donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^t \mathbb{R}.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^t$, qui est orthogonale, on obtient le résultat demandé.

b. D'après la proposition (Q_n) , Il existe une matrice orthogonale $\tilde{\mathbb{U}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\tilde{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\tilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \tilde{\mathbb{R}}.$$

Soit S l'application telle que $S(x) = -1$, si $x < 0$ et $S(x) = +1$, si $x \geq 0$. Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice diagonale telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{D}_{i,i} = S(\tilde{\mathbb{R}}_{i,i})$. Cette matrice est orthogonale.

On a alors

$$\mathbb{D}\tilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \mathbb{D}\tilde{\mathbb{R}}.$$

On pose $\mathbb{U} = \mathbb{D}\tilde{\mathbb{U}}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{D}\tilde{\mathbb{R}}$. Comme le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, la matrice $\mathbb{U}$ est orthogonale. La matrice $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure car le produit d'une matrice diagonale par une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{R}_{i,i} = \mathbb{D}_{i,i}\tilde{\mathbb{R}}_{i,i} = S(\tilde{\mathbb{R}}_{i,i})\tilde{\mathbb{R}}_{i,i} = |\tilde{\mathbb{R}}_{i,i}| \geq 0.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^t$, on obtient le résultat souhaité.

- c. On vient de démontrer, en **Q. 4** b., qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que $A = QR$.

Comme A inversible, on a

$$\det(A) = \det(Q) \det(R) \neq 0.$$

On en déduit que $\det(R) \neq 0$. De plus, R étant triangulaire supérieure, on obtient

$$\det(R) = \prod_{i=1}^n R_{i,i} \neq 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, R_{i,i} \neq 0.$$

et donc, tous les coefficient diagonaux de R sont strictement positifs.

Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note Q_1, Q_2 , deux matrices orthogonales et R_1, R_2 , deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux strictements positifs telles que

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2.$$

On a alors

$$I = A A^{-1} = Q_1 R_1 (Q_2 R_2)^{-1} = Q_1 R_1 R_2^{-1} Q_2^{-1}$$

et donc

$$Q_1^{-1} Q_2 = R_1 R_2^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} T.$$

Comme Q_1 est orthogonale on a $T = Q_1^t Q_2$ et

$$T^t T = (Q_1^t Q_2)^t Q_1^t Q_2 = Q_2^t Q_1 Q_1^t Q_2 = I.$$

La matrice T est donc orthogonal. De plus $T = R_1 R_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice I étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15 (factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice L triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $LL^t = I$. Cette matrice L est évidemment la matrice identité. On en déduit que $T = L^t = I$ et donc $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

EXERCICE 13

Soit $A \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} U & F \\ \hline E & V \end{array} \right) \end{matrix}.$$

On note $v = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de V et on suppose que v est non nul et non colinéaire à e_1^n (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1

Expliciter, en fonction de v , le vecteur $u \in \mathbb{C}^n$, $\|u\|_2 = 1$, tel que

$$H(u)v = \alpha e_1^n, \quad \text{avec } H(u) \stackrel{\text{def}}{=} I - 2uu^*.$$

R. 1

On a

$$u = \frac{v - \alpha e_1^n}{\|v - \alpha e_1^n\|} \text{ avec } \alpha = \|v\|_2 e^{i(\delta\pi - \arg\langle v, e_1^n \rangle)}, \quad \delta \in \{0, 1\}.$$

Comme $\langle v, e_1^n \rangle = \overline{v_1}$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, on obtient

$$\alpha = \|v\|_2 e^{i(\arg(v_1) + \delta\pi)}$$

ce qui donne avec le choix $\delta = 1$

$$\alpha = -\|v\|_2 e^{i\arg(v_1)}.$$

Q. 2

Soient $x \in \mathbb{C}^m$ et $y \in \mathbb{C}^n$. On pose $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $H(w)$ en fonction de $H(x)$ et de $H(y)$.

R. 2

On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{H}(\mathbf{w}) &= \mathbb{I}_{m+n} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^* \\
 &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) - 2 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* & \mathbf{y}^* \end{pmatrix} \\
 &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) - 2 \begin{pmatrix} \mathbf{x}\mathbf{x}^* & \mathbf{x}\mathbf{y}^* \\ \hline \mathbf{y}\mathbf{x}^* & \mathbf{y}\mathbf{y}^* \end{pmatrix} \\
 &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{H}(\mathbf{x}) & -2\mathbf{x}\mathbf{y}^* \\ \hline -2\mathbf{y}\mathbf{x}^* & \mathbb{H}(\mathbf{y}) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Q. 3

On pose $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.

- Déterminer $\mathbb{H}(\mathbf{w})\mathbb{A}$ en fonction de $\mathbb{H}(\mathbf{u})$.
- Que peut-on dire de particulier sur le bloc $(2, 2)$ de $\mathbb{H}(\mathbf{w})\mathbb{A}$?

R. 3

- De la question précédente, on déduit

$$\mathbb{H}(\mathbf{w}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\mathbf{u}) \end{array} \right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{H}(\mathbf{w})\mathbb{A} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\mathbf{u}) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{V} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

- le bloc $(2, 2)$ de $\mathbb{H}(\mathbf{w})\mathbb{A}$ correspond à la matrice $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne vaut $\alpha \mathbf{e}_1^n$. On a alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|cccc} \alpha & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \end{array} \right).$$

EXERCICE 14

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Expliquer comment construire une matrice $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, produit d'au plus $n - 1$ matrices élémentaires de Householder, et, $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure telles $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$.

R. 1

Remarque. Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $j \in \mathcal{M}_1(n)$. On dit que la colonne j de $\mathbb{A}$ est colonne supérieure si, $\forall i \in \llbracket j + 1, n \rrbracket$, $A_{i,j} = 0$, c'est à dire

$$\mathbb{A}[:, j] = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j).$$

En notant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$, l'idée générale est la suivante:

Pour j allant successivement de 1 à $n - 1$, on va déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure sans modifier les colonnes 1 à j de $\mathbb{A}^{[j-1]}$.

Etape 1: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}^{[0]}$ soit colonne supérieure.

- Si $\mathbb{A}_{:,1}^{[0]}$ est nulle ou colinéaire à $\mathbf{e}_1$ alors on prend $\mathbb{H}^{[1]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{A}_{:,1}^{[0]}$ est non nulle et non colinéaire à $\mathbf{e}_1$: on est sous les hypothèse du corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1] avec $\mathbf{a} = \mathbb{A}_{:,1}^{[0]}$.
On en déduit alors qu'avec le vecteur $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ donné par

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{a}_1)} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{a}_1)} \mathbf{e}_1\|_2}$$

on a

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}_1)\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{a}_1)} \mathbf{e}_1.$$

En posant $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(\mathbf{u}_1)$ et $\alpha_1 = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{a}_1)}$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}_1 \mathbb{A}^{[0]} = \left(\begin{array}{c|cccc} \alpha_1 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \end{array} \right).$$

Etape 2: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[2]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 2 de $\mathbb{A}^{[2]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]} \mathbb{A}^{[1]}$ soit colonne supérieure sans modifier la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]}$. Pour cela on va utiliser le corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1] en posant

$$\mathbb{A}^{[1]} = \begin{array}{c|c} 1 & n-1 \\ \hline \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}, \text{ avec } \mathbb{U} = \alpha_1, \mathbb{E} = \mathbb{O}_{n-1,1}, \mathbb{F} = \mathbb{A}_{1,2:n}^{[1]}, \mathbb{V} = \mathbb{A}_{2:n,2:n}^{[1]}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est nulle ou colinéaire à $\mathbf{e}_1^{n-1}$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^{n-1}$, alors on pose $\mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est non nulle et non colinéaire à $\mathbf{e}_1^{n-1}$, et le corollaire peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ donné par

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbb{V}_{:,1} - \alpha_2 \mathbf{e}_1^{n-1}}{\|\mathbb{V}_{:,1} - \alpha_2 \mathbf{e}_1^{n-1}\|} \text{ avec } \alpha_2 = -\|\mathbb{V}_{:,1}\|_2 e^{i \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\mathbf{u}_2)\mathbb{V}_{:,1} = \alpha_2 \mathbf{e}_1^{n-1}$ et donc

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}_2)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|cccc} \alpha_2 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \end{array} \right).$$

De plus, en posant

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ et } \mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{H}(\mathbf{w}_2) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{H}(\mathbf{u}_2) & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

on a

$$\mathbb{A}^{[2]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]} \mathbb{A}^{[1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\mathbf{u}_2)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\mathbf{u}_2)\mathbb{V} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{H}(\mathbf{u}_2)\mathbb{V} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right)$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[2]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions 2 et $n-2$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[2]} = \left(\begin{array}{cc|cccc} \xrightarrow{2} & \xrightarrow{n-2} & & & & \\ \alpha_1 & \bullet & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ 0 & \alpha_2 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ \hline 0 & 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bullet & \dots & \dots & \bullet \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow 2 \\ \downarrow n-2 \end{array}$$

...

Etape j : il faut déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure tout en ayant les $(j-1)$ premières colonnes identiques à celles $\mathbb{A}^{[j-1]}$.

Pour cela on utilise le corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1] en posant, $p = j-1$, $q = n-p$ et

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = {}_q^p \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array} \right), \quad \text{avec } \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{j-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \mathbb{O}_{q,p}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{A}_{1:p,j:n}^{[j-1]}, \quad \mathbb{V} = \mathbb{A}_{j:n,j:n}^{[j-1]}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est nulle ou colinéaire à $\mathbf{e}_1^q$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$, alors on prend $\mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est non nulle et non colinéaire à $\mathbf{e}_1^q$, et le Lemme peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\mathbf{u}_j \in \mathbb{C}^q$ donné par

$$\mathbf{u}_j = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \mathbf{e}_1^q}{\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \mathbf{e}_1^q\|} \quad \text{avec } \alpha_j = -\|\mathbb{V}_{1,:}\|_2 e^{i \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\mathbf{u}_j) \mathbb{V}_{1,:} = \alpha_j \mathbf{e}_1^q$ et donc

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}_j) \mathbb{V} = \begin{pmatrix} \alpha_j & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{pmatrix}.$$

De plus, en posant

$$\mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \mathbf{u}_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\mathbf{w}_j) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

on a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{pmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\mathbf{u}_j) \mathbb{E} & \mathbb{H}(\mathbf{u}_j) \mathbb{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\mathbf{u}_j) \mathbb{V} \end{pmatrix}.$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[j]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions j et $n-j$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[j]} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_j \end{matrix} & \begin{matrix} \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \end{matrix} \end{array} \end{pmatrix}$$

$\xleftarrow{j} \quad \xrightarrow{n-j}$
 $\xleftarrow{j} \quad \xrightarrow{n-j}$

Etape $n-1$: faire l'Etape j avec $j = n-1$.

Au final, on a donc

$$\mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]} \mathbb{A} = \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure, et, les matrices $\mathbb{H}^{[j]}$, $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ sont, soit la matrice identité, soit une matrice élémentaire de Householder: elles sont donc unitaires.

On note $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]}$, cette matrice est donc le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder. Comme le produit de matrices unitaires reste une matrice unitaire, on a $\mathbb{H}$ unitaire et

$$\mathbb{A} = \mathbb{H}^* \mathbb{R}.$$

On pose $Q = H^*$. La matrice Q est alors unitaire et on a

$$Q = (H^{[1]})^* \dots (H^{[n-1]})^*.$$

Les matrices élémentaires de Householder étant hermitiennes, on obtient

$$Q = H^{[1]} \dots H^{[n-1]}$$

et donc Q est aussi le produit d'au plus $(n - 1)$ matrices élémentaires de Householder.

Q. 2

Ecrire une fonction **FactQR** permettant de calculer la factorisation QR d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction **Householder** Exercice 10 Exercice 3.1.9.

R. 2

Algorithme 3 $\mathcal{R}_0$

1: Calculer Q et R

Algorithme 3 $\mathcal{R}_1$

1: Calculer $H^{[1]}$ à $H^{[n-1]}$
2: $H \leftarrow H^{[n-1]} \times \dots \times H^{[1]}$
3: $R \leftarrow H * A$
4: $Q \leftarrow H^*$ ou $H^{[1]} \times \dots \times H^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\mathcal{R}_1$

1: Calculer $H^{[1]}$ à $H^{[n-1]}$
2: $H \leftarrow H^{[n-1]} \times \dots \times H^{[1]}$
3: $R \leftarrow H * A$
4: $Q \leftarrow H^*$ ou $H^{[1]} \times \dots \times H^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\mathcal{R}_2$

1: $Q \leftarrow I$
2: $A^{[0]} \leftarrow A$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ à $n - 1$ **faire**
4: Calculer $H^{[j]}$ à partir de $A^{[j-1]}$
5: $A^{[j]} \leftarrow H^{[j]} * A^{[j-1]}$
6: $Q \leftarrow Q * H^{[j]}$
7: **Fin Pour**
8: $R \leftarrow A^{[n-1]}$

Etape j : On suppose les $j - 1$ premières colonnes de $A^{[j-1]}$ sous forme triangulaire supérieure.

On pose $p = j - 1$, $q = n - p$ et on décompose la matrice $A^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en 2×2 blocs:

$$A^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array} \right)_q^p$$

avec, par hypothèse, $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure et $\mathbb{E}$ matrice nulle.

Pour calculer $H^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à partir de $A^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le vecteur $v = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$ comme étant le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$. On note $e_1 \in \mathbb{C}^q$, le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$.

- Si $v - \langle e_1, v \rangle e_1 = 0$, i.e. v est nul ou colinéaire à e_1 , alors $H^{[j-1]} = I_n$. On a alors

$$A^{[j]} = H^{[j]} A^{[j-1]} = A^{[j-1]}$$

et les j premières colonnes de $A^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

- Sinon, en utilisant le corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1], on définit le vecteur $u \in \mathbb{C}^q$ par

$$u = \frac{v - \alpha e_1}{\|v - \alpha e_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|v\|_2 e^{i \arg(v_1)}$$

et, la matrice élémentaire de Householder $H(u)$ vérifie alors

$$H(u)v = \alpha_j e_1.$$

En posant

$$w = \left(\begin{array}{c} 0_p \\ u \end{array} \right) \in \mathbb{C}^n \text{ et } H^{[j]} = H(w) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

où la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\mathbf{w})$ est donnée par

$$\mathbb{H}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_n - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^* = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\mathbf{u}) \end{array} \right).$$

On a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{V} \end{array} \right)$$

et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

Pour déterminer la matrice $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de connaître $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^q$. On va donc utiliser une fonction réalisant cette opération dans l'algorithme de factorisation QR

Algorithme 3 $\mathcal{R}_2$

```

1:  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$ 
2:  $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$ 
3: Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n-1$  faire
4:   Calculer  $\mathbb{H}^{[j]}$  à partir de  $\mathbb{A}^{[j-1]}$ 
5:    $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$ 
6:    $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$ 
7: Fin Pour
8:  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$ 

```

Algorithme 3 $\mathcal{R}_3$

```

1:  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$ 
2:  $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$ 
3: Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n-1$  faire
4:    $\mathbf{v} \leftarrow \mathbb{A}_{j:n,j}^{[j-1]}$ 
5:    $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\mathbf{v}, n)$ 
6:    $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$ 
7:    $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$ 
8: Fin Pour
9:  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$ 

```

La fonction `MatHouseholder4QRstep` étant donnée par:

Algorithme 4 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\mathbf{v}, n)$.

A partir d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^q$, $q \in \llbracket 2, n \rrbracket$, retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\mathbf{v} - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1 = 0$ (i.e. $\mathbf{v}$ nul ou colinéaire à $\mathbf{e}_1$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identité et $\alpha = 0$,
- sinon, en définissant $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^q$ par

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} - \alpha \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v} - \alpha \mathbf{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\mathbf{v}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{v}_1)}$$

on prend $\mathbb{S}$ comme étant la matrice élémentaire de Householder:

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(\mathbf{w}) \text{ avec } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Données : $\mathbf{v}$: vecteur de $\mathbb{C}^q$, $q \in \llbracket 2, n \rrbracket$,
 n : dimension de

Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
 α : nombre complexe.

```

1: Fonction  $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\mathbf{v}, n)$ 
2:    $\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{0}_q$ ,  $\mathbf{e}(1) \leftarrow 1$ 
3:    $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\mathbf{v}, \mathbf{e}, 1)$ 
4:    $\mathbb{S} \leftarrow \text{eye}(n)$ 
5:   Si  $\alpha \neq 0$  alors
6:      $p \leftarrow n - q$ 
7:      $I \leftarrow p + 1 : n$ 
8:      $\mathbb{S}(I, I) \leftarrow \mathbb{H}$ 
9:   Fin Si
10: Fin Fonction

```

Bien évidemment, on peut simplifier/améliorer l'écriture de l'Algorithme 3 $\mathcal{R}_3$ en ne stockant pas les suites de matrices:

Algorithme 3 $\mathcal{R}_3$

```

1:  $Q \leftarrow I$ 
2:  $A^{[0]} \leftarrow A$ 
3: Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n - 1$  faire
4:    $v \leftarrow A_{j:n,j}^{[j-1]}$ 
5:    $[H^{[j]}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(v, n)$ 
6:    $A^{[j]} \leftarrow H^{[j]} * A^{[j-1]}$ 
7:    $Q \leftarrow Q * H^{[j]}$ 
8: Fin Pour
9:  $R \leftarrow A^{[n-1]}$ 

```

Algorithme 3 $\mathcal{R}_4$

```

1:  $Q \leftarrow I$ 
2:  $R \leftarrow A$ 
3: Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n - 1$  faire
4:    $v \leftarrow R_{j:n,j}$ 
5:    $[H, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(v, n)$ 
6:   Si  $\alpha \neq 0$  alors ▷ Sinon  $H = I!$ 
7:      $R \leftarrow H * R$ 
8:      $Q \leftarrow Q * H$ 
9:   Fin Si
10: Fin Pour

```

Voici (enfin) l'algorithme final:

Algorithme 3 Fonction **FactQR**

Données : A : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Résultat : Q : matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

R : matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

```

1: Fonction  $[Q, R] \leftarrow \text{FactQR}(A)$ 
2:    $Q \leftarrow I$ 
3:    $R \leftarrow A$ 
4:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n - 1$  faire
5:      $v \leftarrow R_{j:n,j}$ 
6:      $[H, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(v, n)$ 
7:     Si  $\alpha \neq 0$  alors ▷ Sinon  $H = I!$ 
8:        $R \leftarrow H * R$ 
9:        $Q \leftarrow Q * H$ 
10:    Fin Si
11:  Fin Pour
12: Fin Fonction

```

Q. 3

Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:

- **MatRand**(m, n) retournant une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[0, 1]$.
- **NormInf**(A) retournant la norme infinie d'une matrice carrée A .

R. 3

```

1:  $A \leftarrow \text{MatRand}(50, 50)$ 
2:  $[Q, R] \leftarrow \text{FactQR}(A)$ 
3:  $\text{err} \leftarrow \text{NormInf}(A - Q * R)$ 

```

▷ doit être très petit!

2 Exercices supplémentaires

EXERCICE 15 : Factorisation LU

Q. 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation LU. Montrer que cette factorisation est unique (sans citer le théorème du cours!)

a. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la première ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{1,j} = \sum_{k=1}^4 L_{1,k} U_{k,j} = U_{1,j}.$$

Donc on a $U_{1,j} = A_{1,j}$, $\forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{U}_{1,:} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la première colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,1} = \sum_{k=1}^4 L_{j,1} U_{k,1} = L_{j,1} U_{1,1}.$$

Donc on a $L_{j,1} = A_{j,1}/U_{1,1}$, $\forall j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{L}_{:,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & L_{3,2} & 1 & 0 \\ 4 & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la deuxième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{2,j} = \sum_{k=1}^4 L_{2,k} U_{k,j} = L_{2,1} U_{1,j} + L_{2,2} U_{2,j} = L_{2,1} U_{1,j} + U_{2,j}.$$

Donc on a $U_{2,j} = A_{2,j} - L_{2,1} U_{1,j}$, $\forall j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{U}_{2,:} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la deuxième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,2} = \sum_{k=1}^4 L_{j,1} U_{k,2} = L_{j,1} U_{1,2} + L_{j,2} U_{2,2}.$$

Donc on a $L_{j,2} = (A_{j,2} - L_{j,1} U_{1,2})/U_{2,2}$, $\forall j \in \llbracket 3, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{L}_{:,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la troisième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{3,j} = \sum_{k=1}^4 L_{3,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^2 L_{3,k} U_{k,j} + L_{3,3} U_{3,j} = \sum_{k=1}^2 L_{3,k} U_{k,j} + U_{3,j}.$$

Donc on a $U_{3,j} = A_{3,j} - \sum_{k=1}^2 L_{3,k} U_{k,j}$, $\forall j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{U}_{3,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la troisième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,3} = \sum_{k=1}^4 L_{j,1} U_{k,3} = L_{j,1} U_{1,3} + L_{j,2} U_{2,3} + L_{j,3} U_{3,3}.$$

Donc on a $L_{j,3} = (A_{j,3} - L_{j,1} U_{1,3} - L_{j,2} U_{2,3})/U_{3,3}$, $\forall j \in \llbracket 4, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{L}_{:,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- Enfin, on calcule la quatrième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{4,4} = \sum_{k=1}^4 L_{4,k} U_{k,4} = \sum_{k=1}^3 L_{4,k} U_{k,4} + L_{4,4} U_{4,4} = \sum_{k=1}^3 L_{4,k} U_{k,4} + U_{4,4}.$$

Donc on a $U_{4,4} = A_{4,4} - \sum_{k=1}^3 L_{4,k} U_{k,4}$, et $\mathbb{U}_{3,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Au final, on a

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut bien sûr vérifier que

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

- b. Pour démontrer l'unicité, on va supposer qu'il existe deux factorisations $\mathbb{L}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$ i.e.

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2 \mathbb{U}_2.$$

avec $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ matrices triangulaires inférieures à diagonale unité et $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ matrices triangulaires supérieures (inversibles). En multipliant l'équation $\mathbb{L}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2 \mathbb{U}_2$ à gauche par $\mathbb{L}_1^{-1}$ et à droite par $\mathbb{U}_2^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2^{-1} = \mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2. \quad (\text{R15.7})$$

La matrice $\mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonale unité. Elle est égale à la matrice $\mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2^{-1}$ qui elle est triangulaire supérieure (car produit de deux matrices triangulaires supérieures). Donc $\mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2$ est à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure : elle est donc diagonale. Comme elle est à diagonale unité on en déduit que $\mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. De l'équation (R15.8), on tire alors $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$.

- c. On a

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{L}\mathbb{U}) = \det(\mathbb{L}) \det(\mathbb{U}) \\ &= 1 \times 16 = 16. \end{aligned}$$

- d. Résoudre $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et équivalent à résoudre $\mathbb{L}\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. on note $\mathbf{y} = \mathbb{U}\mathbf{x}$ qui est solution du système triangulaire inférieur

$$\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la descente pour obtenir

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on peut déterminer $\mathbf{x}$ comme solution du système triangulaire supérieur

$$\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la remontée pour obtenir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut bien sûr vérifier que

$$\mathbb{A}\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

Q. 2

- Déterminer $\mathbb{L}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ une matrice triangulaire supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$.
- Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$.
- Résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

R. 2

a. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la première ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{1,j} = \sum_{k=1}^4 L_{1,k}U_{k,j} = U_{1,j}.$$

Donc on a $U_{1,j} = A_{1,j}$, $\forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{U}_{1,:} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la première colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,1} = \sum_{k=1}^4 L_{j,k}U_{k,1} = L_{j,1}U_{1,1}.$$

$$\text{Donc on a } L_{j,1} = A_{j,1}/U_{1,1}, \forall j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket \text{ et } \mathbb{L}_{:,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & L_{3,2} & 1 & 0 \\ 4 & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la deuxième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{2,j} = \sum_{k=1}^4 L_{2,k}U_{k,j} = L_{2,1}U_{1,j} + L_{2,2}U_{2,j} = L_{2,1}U_{1,j} + U_{2,j}.$$

Donc on a $U_{2,j} = A_{2,j} - L_{2,1}U_{1,j}$, $\forall j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$ et $\mathbb{U}_{2,:} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la deuxième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,2} = \sum_{k=1}^4 L_{j,1} U_{k,2} = L_{j,1} U_{1,2} + L_{j,2} U_{2,2}.$$

$$\text{Donc on a } L_{j,2} = (A_{j,2} - L_{j,1} U_{1,2}) / U_{2,2}, \forall j \in \llbracket 3, 4 \rrbracket \text{ et } \mathbb{L}_{:,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la troisième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{3,j} = \sum_{k=1}^4 L_{3,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^2 L_{3,k} U_{k,j} + L_{3,3} U_{3,j} = \sum_{k=1}^2 L_{3,k} U_{k,j} + U_{3,j}.$$

$$\text{Donc on a } U_{3,j} = A_{3,j} - \sum_{k=1}^2 L_{3,k} U_{k,j}, \forall j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket \text{ et } \mathbb{U}_{2,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On calcule ensuite la troisième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,3} = \sum_{k=1}^4 L_{j,1} U_{k,3} = L_{j,1} U_{1,3} + L_{j,2} U_{2,3} + L_{j,3} U_{3,3}.$$

$$\text{Donc on a } L_{j,3} = (A_{j,3} - L_{j,1} U_{1,3} - L_{j,2} U_{2,3}) / U_{3,3}, \forall j \in \llbracket 4, 4 \rrbracket \text{ et } \mathbb{L}_{:,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- Enfin, on calcule la quatrième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{4,4} = \sum_{k=1}^4 L_{4,k} U_{k,4} = \sum_{k=1}^3 L_{4,k} U_{k,4} + L_{4,4} U_{4,4} = \sum_{k=1}^3 L_{4,k} U_{k,4} + U_{4,4}.$$

$$\text{Donc on a } U_{4,4} = A_{4,4} - \sum_{k=1}^3 L_{4,k} U_{k,4}, \text{ et } \mathbb{U}_{3,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Au final, on a

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut bien sûr vérifier que

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \mathbb{L} \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

- b. Pour démontrer l'unicité, on va supposer qu'il existe deux factorisations $\mathbb{L} \mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$ i.e.

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2 \mathbb{U}_2.$$

avec $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ matrices triangulaires inférieures à diagonale unité et $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ matrices triangulaires supérieures (inversibles). En multipliant l'équation $\mathbb{L}_1 \mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2 \mathbb{U}_2$ à gauche par $\mathbb{L}_1^{-1}$ et à droite par $\mathbb{U}_2^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2^{-1} = \mathbb{L}_1^{-1} \mathbb{L}_2. \quad (\text{R15.8})$$

La matrice $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonale unité. Elle est égale à la matrice $\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1}$ qui elle est triangulaire supérieure (car produit de deux matrices triangulaires supérieures). Donc $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ est à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure : elle est donc diagonale. Comme elle est à diagonale unité on en déduit que $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. De l'équation (R15.8), on tire alors $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$.

c. On a

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{L}\mathbb{U}) = \det(\mathbb{L})\det(\mathbb{U}) \\ &= 1 \times 16 = 16.\end{aligned}$$

d. Résoudre $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et équivalent à résoudre $\mathbb{L}\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. on note $\mathbf{y} = \mathbb{U}\mathbf{x}$ qui est solution du système triangulaire inférieur

$$\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la descente pour obtenir

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on peut déterminer $\mathbf{x}$ comme solution du système triangulaire supérieur

$$\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la remontée pour obtenir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut bien sûr vérifier que

$$\mathbb{A}\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

Q. 3

On peut noter que la matrice $\mathbb{A}$ est symétrique

- Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t$, la matrice $\mathbb{L}$ étant celle de la question précédente.
- Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- En déduire que la matrice $\mathbb{A}$ est définie positive.

R. 3

a. On pose

$$\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\mathbb{D}\mathbb{L}^t = \mathbb{U}$. En effet

$$\mathbb{D}\mathbb{L}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \mathbb{U}.$$

b. Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si

symétrique : $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,

définie positive : $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$.

c. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^t\mathbf{x}, \mathbb{L}^t\mathbf{x} \rangle$$

On pose $\mathbf{y} = \mathbb{L}^t\mathbf{x} \neq 0$ car $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^t$ inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^4 D_{i,i} |y_i|^2 > 0$$

car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0, \forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $\mathbf{y} \neq 0$.

La matrice symétrique $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

Q. 4

En déduire qu'il existe une matrice $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure à diagonale positive telle que $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^t$.

R. 4

Soit $\mathbb{S}$ la matrice diagonale telle que $\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}$ donnée par

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbb{S}$ est symétrique, on a

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t = \mathbb{L}\mathbb{S}\mathbb{S}^t\mathbb{L}^t.$$

On pose $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{S}$, c'est à dire

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut bien sûr vérifier que

$$\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{B}^t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 16

Définition. On dit que $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une **factorisation** $\mathbb{W}\mathbb{U}$ si il existe $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire inférieure inversible** et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **triangulaire supérieure à diagonale unité** telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}.$$

On note $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\mathbb{W} = (w_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{U} = (u_{i,j})_{i,j=1}^n$ les composantes de ces matrices.

On rappelle que la sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = a_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket.$$

Q. 1

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

- Démontrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.
- Démontrer que la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ est unique.
- Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ à l'aide de la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

R. 1

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket.$$

- Comme la matrice $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure inversible, on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $w_{i,i} \neq 0$. Comme la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure à diagonale unité, elle est inversible et on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_{i,i} = 1$.

La sous-matrice principale d'ordre n de $\mathbb{A}$, est $\mathbb{A}$ qui est inversible par hypothèse.

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Montrons que la sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, est inversible.

On écrit les trois matrices $\mathbb{A}$, $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$ sous la forme de matrices blocs carrés 2×2 dont le premier bloc diagonal est dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et le second dans $\mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure et $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure, on a

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array} \right), \quad \mathbb{W} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{W}_{1,1} & \mathbb{O}_{k,n-k} \\ \hline \mathbb{W}_{2,1} & \mathbb{W}_{2,2} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{1,1} & \mathbb{U}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n-k,k} & \mathbb{U}_{2,2} \end{array} \right).$$

On a alors $\mathbb{W}_{1,1} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec tous ses éléments diagonaux non nuls puisque $(\mathbb{W}_{1,1})_{i,i} = w_{i,i} \neq 0$. $\mathbb{W}_{1,1}$ est donc inversible. De plus, $\mathbb{U}_{1,1} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux égaux à 1 et donc $\mathbb{U}_{1,1}$ est inversible. On a

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{W}_{1,1} & \mathbb{O}_{k,n-k} \\ \hline \mathbb{W}_{2,1} & \mathbb{W}_{2,2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{1,1} & \mathbb{U}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n-k,k} & \mathbb{U}_{2,2} \end{array} \right).$$

En effectuant le produit matricielle bloc, 1ère ligne bloc par 1ère colonne bloc, on obtient

$$\mathbb{A}_{1,1} = \mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1} + \mathbb{O}_{k,n-k}\mathbb{O}_{n-k,k} = \mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1}.$$

On a donc, par propriété du déterminant,

$$\det(\mathbb{A}_{1,1}) = \det(\mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1}) = \det(\mathbb{W}_{1,1}) \det(\mathbb{U}_{1,1}).$$

Comme $\mathbb{W}_{1,1}$ et $\mathbb{U}_{1,1}$ sont inversibles, leurs déterminants sont non nuls. On en déduit que $\det(\mathbb{A}_{1,1}) \neq 0$, c'est à dire $\mathbb{A}_{1,1}$ inversible, or par définition, $\mathbb{A}_{1,1} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ est la sous matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$.

- Soient $\mathbb{W}_1\mathbb{U}_1$ et $\mathbb{W}_2\mathbb{U}_2$ deux factorisations $\mathbb{W}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$, avec $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ triangulaires inférieures inversibles et $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ triangulaires supérieures à diagonale unité (donc inversibles). Les matrices $\mathbb{W}_1^{-1}$ et $\mathbb{W}_2^{-1}$ sont donc triangulaires inférieures et les matrices $\mathbb{U}_1^{-1}$ et $\mathbb{U}_2^{-1}$ sont donc triangulaires supérieures à diagonale unité puisque pour $k \in \{1, 2\}$, on

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mathbb{U}_k^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(\mathbb{U}_k)_{i,i}} = 1.$$

On a

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{W}_2\mathbb{U}_2$$

et en multipliant à droite par $\mathbb{U}_2^{-1}$ et à gauche par $\mathbb{W}_1^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1} = \mathbb{W}_1^{-1}\mathbb{W}_2. \quad (\text{R16.9})$$

La matrice $\mathbb{W}_1^{-1}\mathbb{W}_2$ est triangulaire inférieure car produit de deux matrices triangulaires inférieures. La matrice $\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1}$ est triangulaire supérieure car produit de deux matrices triangulaires supérieures. Comme ces deux matrices sont égales, on en déduit On déduit de (R16.9), que les matrices $\mathbb{W}_1^{-1}\mathbb{W}_2$ et $\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1}$ sont diagonales. Or on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1})_{i,i} = (\mathbb{U}_1)_{i,i}(\mathbb{U}_2^{-1})_{i,i} = 1$$

ce qui donne

$$\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{W}_1^{-1}\mathbb{W}_2$$

et donc $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$ et $\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_2$.

d. Comme $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$, résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ revient alors à résoudre

$$\mathbb{W}\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

On pose $\mathbf{y} = \mathbb{U}\mathbf{x}$, et on résoud tout à bord

$$\mathbb{W}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

puis, une fois le vecteur $\mathbf{y}$ déterminé, on résoud

$$\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Q. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$. Expliquer de manière détaillée une méthodologie pour calculer les coefficients des matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$. On explicitera les formules utilisées.

R. 2

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U} \quad (\text{R16.10})$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ w_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ w_{n,1} & \dots & w_{n,n-1} & w_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \dots & u_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{R16.11})$$

Etape 1: • La 1ère colonne de $\mathbb{U}$ est connue, on peut alors calculer la 1ère colonne de $\mathbb{W}$.

- La 1ère ligne de $\mathbb{W}$ est connue, puisque l'on vient de calculer (entre autres) $w_{1,1}$. On peut déterminer la 1ère ligne de $\mathbb{U}$.

Etape 2: • La 2ème colonne de $\mathbb{U}$ est connue, on peut alors, connaissant la 1ère colonne de $\mathbb{W}$, calculer la 2ème colonne de $\mathbb{W}$.

- La 2ème ligne de $\mathbb{W}$ est maintenant connue. On peut déterminer, la 2ème ligne de $\mathbb{U}$ puisque l'on connaît sa 1ère ligne.

⋮

Etape i : on suppose connue les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{W}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

- La $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{U}$ est connue puisque $u_{i,i} = 1$. On peut calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{W}$. En effet, soit $j \in \llbracket i, n \rrbracket$, on a

$$a_{j,i} = \sum_{k=1}^n w_{j,k} u_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} w_{j,k} u_{k,i} + w_{j,i} u_{i,i} + \sum_{k=i+1}^n w_{j,k} u_{k,i}.$$

Or, $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure, donc $u_{k,i} = 0, \forall k > i$. De plus $u_{i,i} = 1$, on obtient donc

$$a_{j,i} = \sum_{k=1}^{i-1} w_{j,k} u_{k,i} + w_{j,i}.$$

Dans la somme, par hypothèse, $w_{j,k}$ et $u_{k,i}$ sont connus car $k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$. On obtient alors

$$\forall j \in \llbracket i, n \rrbracket, w_{j,i} = a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} w_{j,k} u_{k,i}. \quad (\text{R16.12})$$

- La $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{W}$ est maintenant connue puisque l'on vient de calculer (entre autres) $w_{i,i}$. On peut alors calculer la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{U}$. En effet, soit $j \in \llbracket i+1, n \rrbracket$, on a

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n w_{i,k} u_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} w_{i,k} u_{k,j} + w_{i,i} u_{i,j} + \sum_{k=i+1}^n w_{i,k} u_{k,j}.$$

Or, $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure, donc $w_{i,k} = 0, \forall k > i$. On obtient donc

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} w_{i,k} u_{k,j} + w_{i,i} u_{i,j}.$$

Dans la somme, par hypothèse, $w_{i,k}$ et $u_{k,j}$ sont connus car $k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$. On obtient alors

$$\forall j \in \llbracket i+1, n \rrbracket, u_{i,j} = \frac{1}{w_{i,i}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} w_{i,k} u_{k,j} \right). \quad (\text{R16.13})$$

et $w_{i,i} \neq 0$ car sinon la factorisation wu de $\mathbb{A}$ ne serait pas possible.

Pour résumer, on va calculer successivement, pour i allant de 1 à n

- la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{W}$:

$$\begin{cases} w_{j,i} = 0, & \forall j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \\ w_{j,i} = a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} w_{j,k} u_{k,i}, & \forall j \in \llbracket i, n \rrbracket, \end{cases} \quad (\text{R16.14})$$

- la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{U}$:

$$\begin{cases} u_{i,j} = 0, & \forall j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \\ u_{i,i} = 1, \\ u_{i,j} = \frac{1}{w_{i,i}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} w_{i,k} u_{k,j} \right), & \forall j \in \llbracket i+1, n \rrbracket, \end{cases} \quad (\text{R16.15})$$

Q. 3[Algo]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

- Ecrire la fonction **ResTriSup** retournant $\mathbf{x}$, solution de $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.
- Ecrire la fonction algorithmique **FactWU** retournant les matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$.
- On suppose la fonction $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{ResTriInf}(\mathbb{L}, \mathbf{b})$ retournant $\mathbf{x}$, solution de $\mathbb{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, déjà écrite. Ecrire la fonction algorithmique **ResWU** retournant $\mathbf{x}$, solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant sa factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

R. 3

- Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Pour résoudre le système $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, on utilise l'algorithme de remontée:
pour i allant de n à 1 (pas de -1) faire

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n U_{i,j} x_j) / U_{i,i}.$$

Données : $\mathbb{U}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ supérieure inversible.
 $\mathbf{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Résultat : $\mathbf{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

```

1: Fonction  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{ResTriSup}(\mathbb{U}, \mathbf{b})$ 
2:   Pour  $i \leftarrow n$  à 1 faire(pas de  $-1$ )
3:      $S \leftarrow 0$ 
4:     Pour  $j \leftarrow i+1$  à  $n$  faire
5:        $S \leftarrow S + U(i, j) * x(j)$ 
6:     Fin Pour
7:      $x(i) \leftarrow (b(i) - S) / U(i, i)$ 
8:   Fin Pour
9: Fin Fonction
```

- Voici l'algorithme final:

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

Résultat : $\mathbb{U}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure
avec $U_{i,i} = 1, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
 $\mathbb{W}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure.

```
1: Fonction  $[\mathbb{W}, \mathbb{U}] \leftarrow \text{FactWU}(\mathbb{A})$ 
2:    $\mathbb{W} \leftarrow \mathbb{O}_n$ 
3:    $\mathbb{U} \leftarrow \mathbb{I}_n$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:     Pour  $j \leftarrow i$  à  $n$  faire
6:        $S_1 \leftarrow 0$ 
7:       Pour  $k \leftarrow 1$  à  $i-1$  faire
8:          $S_1 \leftarrow S_1 + W(j, k) * U(k, i)$ 
9:       Fin Pour
10:       $W(j, i) \leftarrow A(j, i) - S_1$ 
11:    Fin Pour
12:    Pour  $j \leftarrow i+1$  à  $n$  faire
13:       $S_2 \leftarrow 0$ 
14:      Pour  $k \leftarrow 1$  à  $i-1$  faire
15:         $S_2 \leftarrow S_2 + W(i, k) * U(k, j)$ 
16:      Fin Pour
17:       $U(i, j) \leftarrow (A_{i,j} - S_2) / W(i, i).$ 
18:    Fin Pour
19:  Fin Pour
20: Fin Fonction
```

▷ $\mathbb{O}_n$ matrice nulle $n \times n$
▷ $\mathbb{I}_n$ matrice identité $n \times n$
▷ Calcul de la colonne i de $\mathbb{W}$
▷ Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$

c. On utilise la **Q.1-d**.

Voici la fonction **ResWU** permettant de résoudre, par une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$, le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$,
 $\mathbf{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Résultat : $\mathbf{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

```
1: Fonction  $\mathbf{x} \leftarrow \text{ResWU}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ 
2:    $[\mathbb{W}, \mathbb{U}] \leftarrow \text{FactWU}(\mathbb{A})$ 
3:    $\mathbf{y} \leftarrow \text{ResTriInf}(\mathbb{W}, \mathbf{b})$ 
4:    $\mathbf{x} \leftarrow \text{ResTriSup}(\mathbb{U}, \mathbf{y})$ 
5: Fin Fonction
```

▷ Factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$
▷ Résolution du système $\mathbb{W}\mathbf{y} = \mathbf{b}$
▷ Résolution du système $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$

On admet le résultat suivant:

Théorème. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ si et seulement si toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.

Q. 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive.

- Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive.
- Démontrer que $\mathbb{A}$ est inversible.
- Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.
- En déduire que $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

R. 4

- a. $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne définie positive si

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \text{ et } \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0.$$

- b. $\mathbb{A}$ inversible est équivalent $\ker \mathbb{A} = \{0\}$.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, tel que $\mathbb{A}\mathbf{x} = 0$. Montrons que $\mathbf{x} = 0$.

Par l'absurde, supposons $\mathbf{x} \neq 0$. Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive on a

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$$

ce qui n'est pas possible car $\mathbb{A}\mathbf{x} = 0$, et $\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

- c. On écrit la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme de matrices blocs carrés 2×2 dont le premier bloc diagonal est dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et le second dans $\mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_k & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array} \right)$$

On veut démontrer que

$$\forall y \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}, \langle \Delta_k \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > 0.$$

Soit $y \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$. On note $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ le vecteur tel que $x_i = y_i, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $x_i = 0, \forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$. On note que $\mathbf{x} \neq 0$ car $\mathbf{y} \neq 0$. On a

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_k & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_{n-k} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \Delta_k \mathbf{y} \\ \mathbb{A}_{2,1} \mathbf{y} \end{array} \right)$$

et donc

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \left\langle \left(\begin{array}{c} \Delta_k \mathbf{y} \\ \mathbb{A}_{2,1} \mathbf{y} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_{n-k} \end{array} \right) \right\rangle = \langle \Delta_k \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

Comme $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, et $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive, on a $\langle \mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ et donc $\langle \Delta_k \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > 0$.

- d. Comme toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives, elles sont inversibles. D'après la **Q.4**, $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ et d'après la **Q.1-c**, elle est unique.