Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Chapitre 2: *Algorithmique*

1 Basique

Exercice 1

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $N \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in [\![0,N]\!]$, $t^n = a + n\frac{b-a}{N}$. Ecrire une fonction DisReg permettant de retourner l'ensemble des $(t^n)_{n=0}^{N}$.

Exercice 2

Ecrire une fonction **polynome** permettant de calculer

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i.$$

Exercice 3

Ecrire une fonction **PM** permettant de calculer

$$y = \prod_{k=0}^{m} c_k \sin(x^k)$$

Exercice 4

Ecrire les fonctions **PS** et **SP** permettant de calculer respectivement

$$y = \prod_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j \sin((2j\pi/n)x^i)$$

et

$$z = \sum_{k=0}^{m} c_k \prod_{j=1}^{n} d_j \sin((2j\pi/n)w^k)$$

Exercice 5

On veut calculer

$$I = \prod_{k=0}^{n} \left(\alpha_k \sum_{i=1}^{p} \cos(\frac{2\pi}{k+i}x) + \beta_k \sum_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^{q} \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{q} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Q. 1 *Quelles sont les données minimales avec hypothèses permettant de calculer I.*

Q. 2 *Ecrire en langage algorithmique la fonction `calculI` permettant de calculer I.*

2 Graphisme

Exercice 6

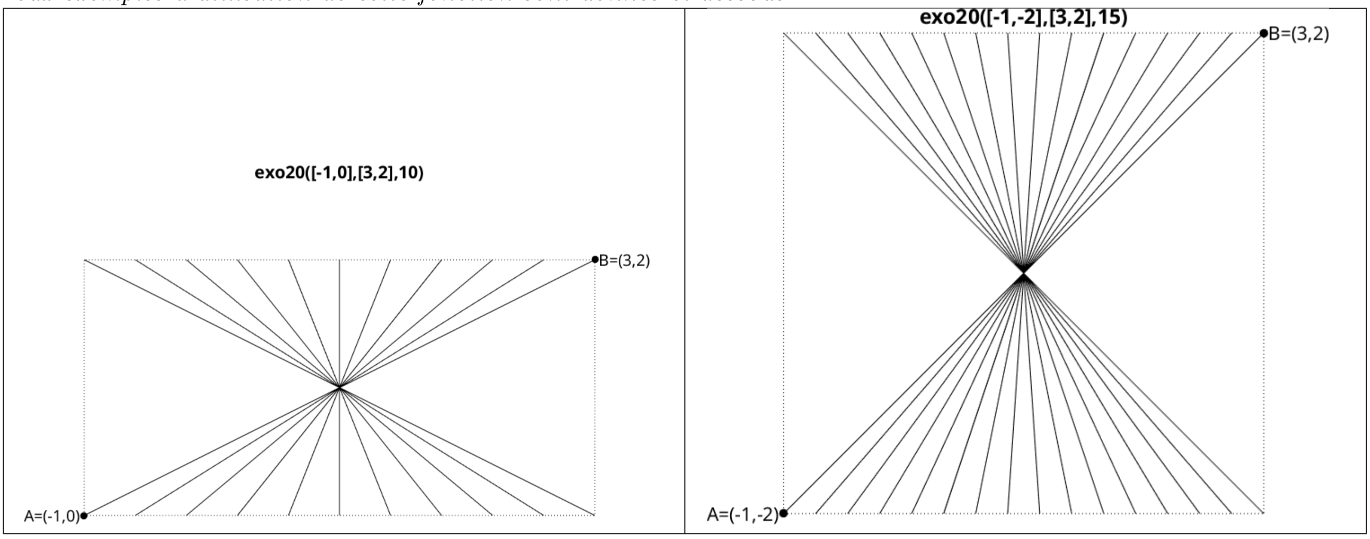
Q. 1 *Ecrire une fonction* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ *(*$a < b$*) en* $n + 1$ *points.*

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A, (x_B, y_A), B et (x_A, y_B).
On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B, on dispose de la commande `plot(`$[x_A, x_B]$`,`$[y_A, y_B]$`)`.

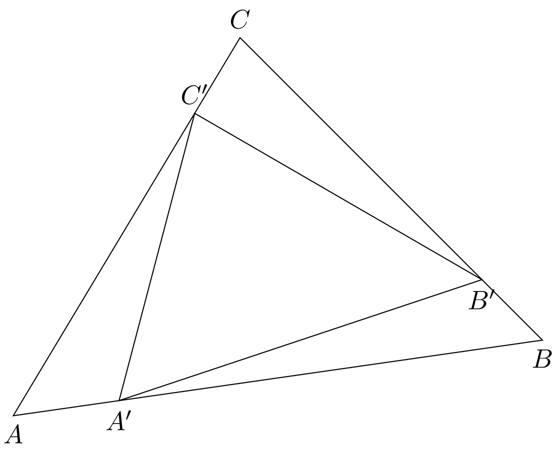
Q. 2 *Ecrire une fonction* `exo20` *de paramètres* A, B *et* n *permettant de*

- *représenter les bords du rectangle,*
- *relier les points des bords supérieurs et inférieurs, dont les abscices sont une discrétisation régulière en* $n + 1$ *points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.*

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :



Exercice 7



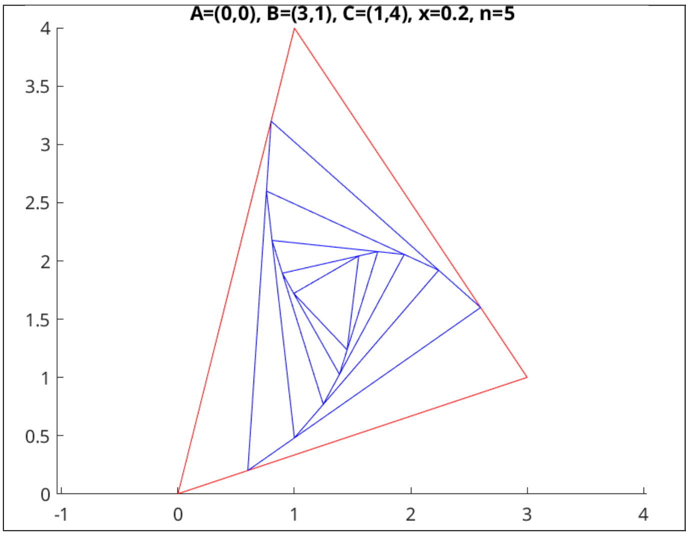
Soit T un triangle de sommets A, B et C. A partir de ce triangle on peut construire un nouveau triangle de sommets A', B' et C' vérifiant

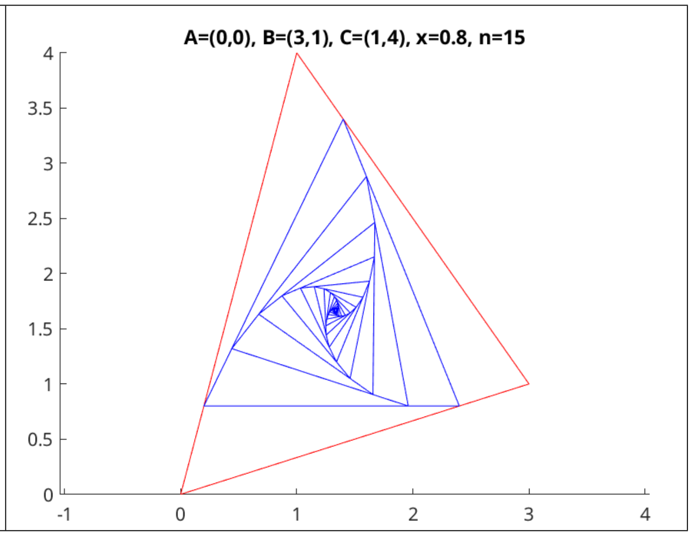
$$\overrightarrow{AA'} = x\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BB'} = x\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{CC'} = x\overrightarrow{CA}$$

avec x un réel compris strictement entre 0 et 1.

L'objectif est, pour un x fixé, d'itérer n fois ce processus de construction en partant à chaque itération du dernier triangle construit et de représenter l'ensemble des triangles.

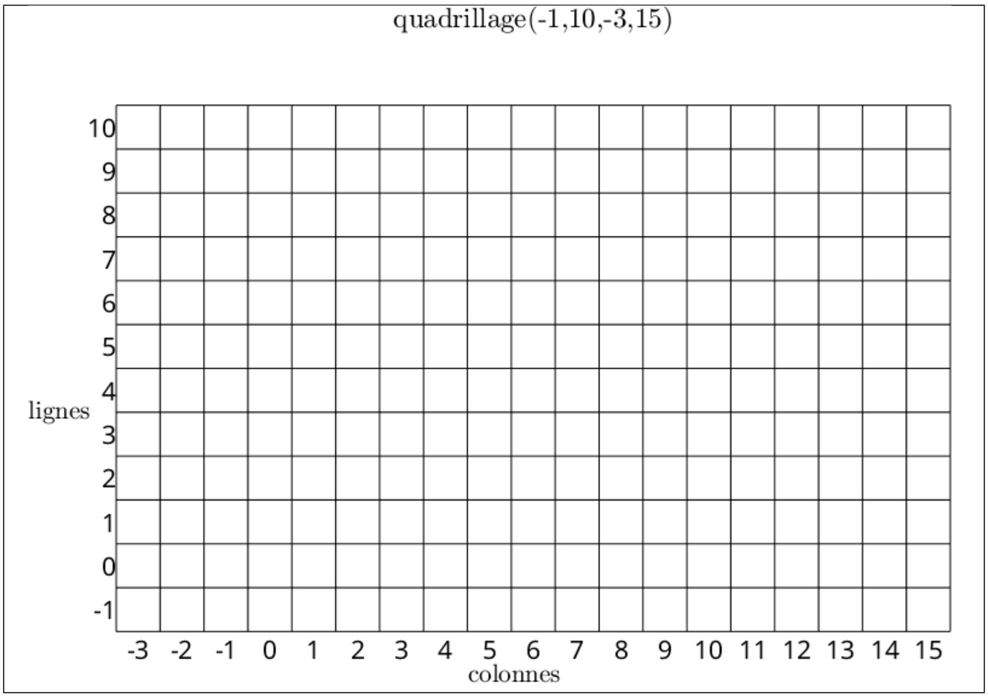
Q. 1 *Ecrire une fonction* ***Algorithmique*** **`triangles`** *permettant à partir des trois sommets A, B, C d'un triangle initial quelconque non réduit à une droite ou à un point, de représenter ce triangle ainsi que les n triangles obtenus par le processus de construction décrit ci-dessus avec un x donné dans $]0,1[$. On dispose pour celà de la fonction* `plot([`x_A`,`x_B`],[`y_A`,`y_B`])` *permettant de tracer le segment $[A, B]$ du plan avec $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*





Préréquis pour les exercices 8 à 11

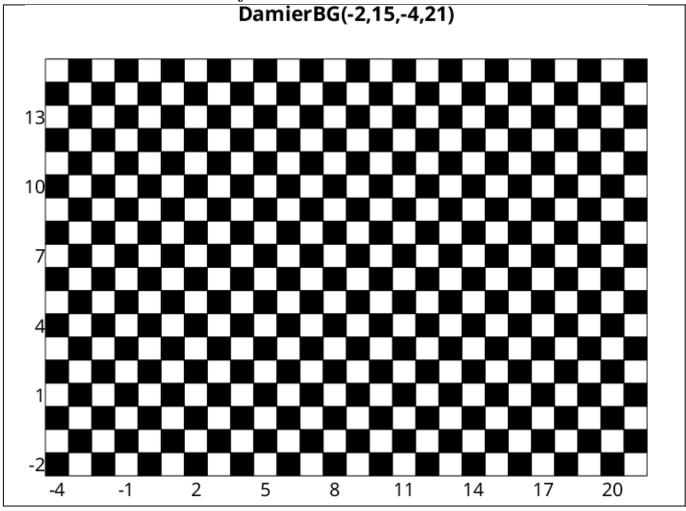
On dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation

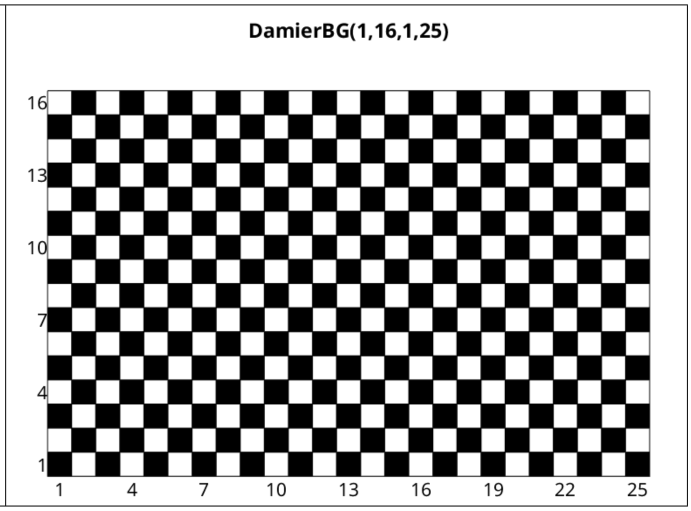


On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

Exercice 8

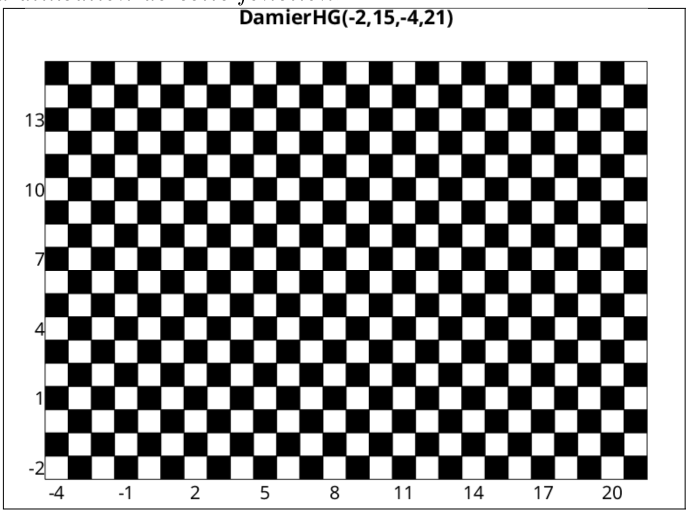
Q. 1 *Ecrire la fonction* DamierBG(imin,imax,jmin,jmax) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* quadrillage(imin,imax,jmin,jmax) *sachant que la case de position* (imin,jmin) *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

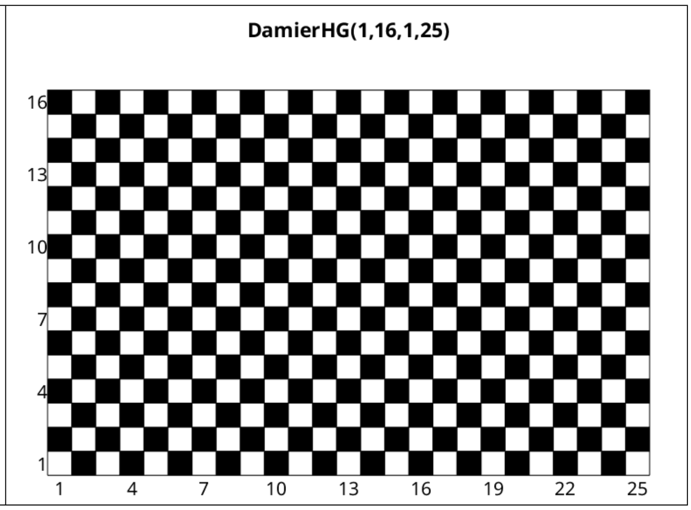




Exercice 9

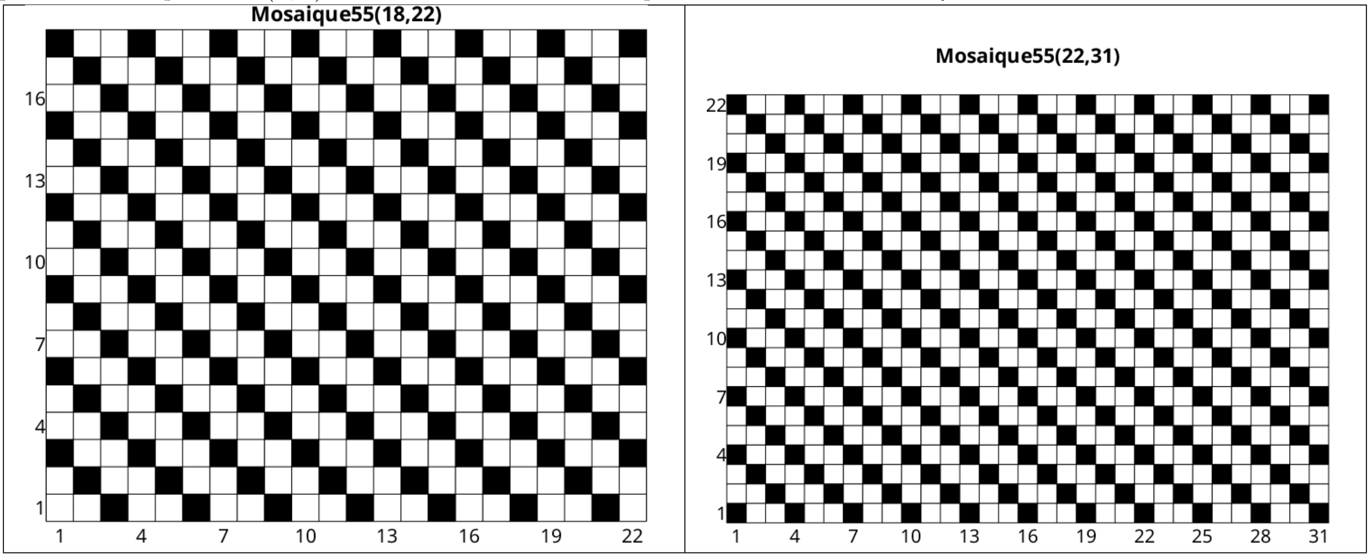
Q. 1 *Ecrire la fonction* DamierHG(imin,imax,jmin,jmax) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* quadrillage(imin,imax,jmin,jmax) *sachant que la case de position* (imax,jmin) *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*





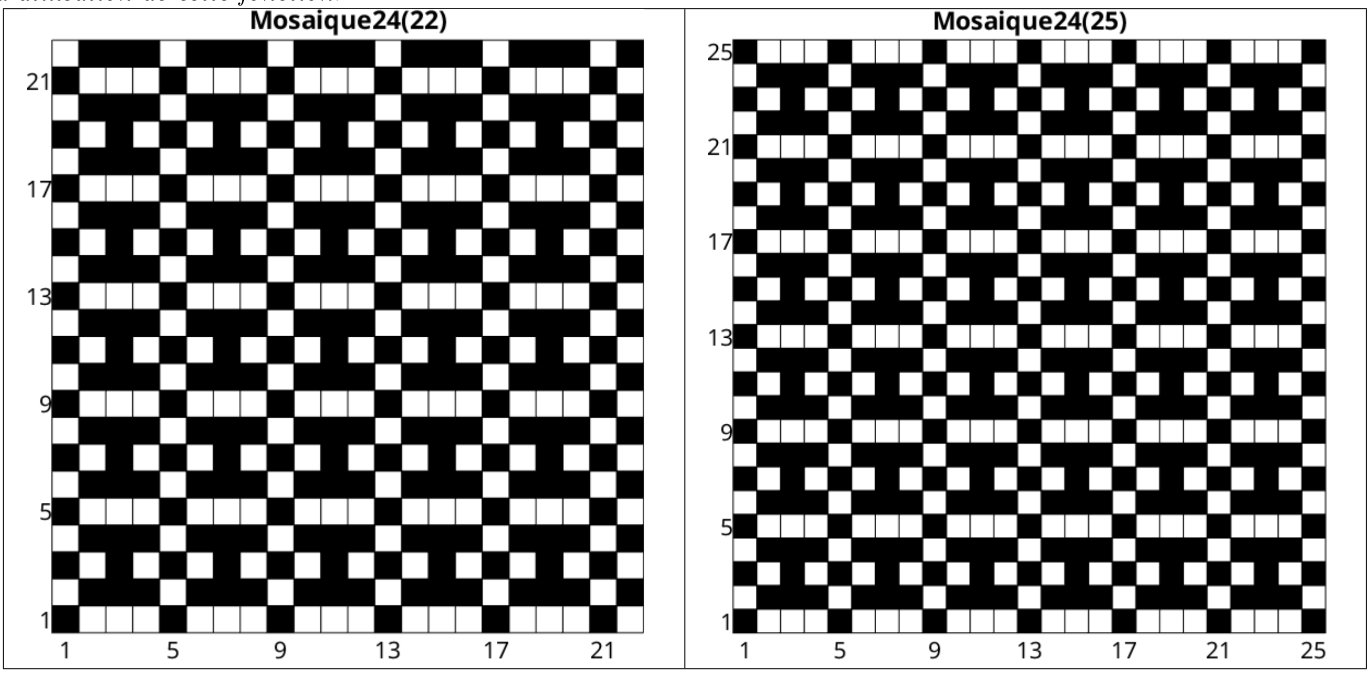
Exercice 10

Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique55(n,m) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* quadrillage (1,n,1,m) *sachant que la case de position* $(n, 1)$ *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*



Exercice 11

Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique24(n) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* quadrillage (1,n,1,n) *sachant que la ligne 1 est composée de la séquence noir,blanc,blanc,blanc,noir,blanc,blanc,blanc, ... Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*



3 Algèbre linéaire

Exercice 12

Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1 *Ecrire une fonction* dot *permettant de calculer le produit scalaire du vecteur* $\boldsymbol{u}$ *par* $\boldsymbol{v}$, *noté mathématiquement par* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

Q. 2 *Ecrire une fonction* norm2 *permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur* $\boldsymbol{u}$ *donnée par* $\|\boldsymbol{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$.

Soient a et b deux réels.

Q. 3 *Ecrire une fonction* aUpbV *permettant de calculer le vecteur* $\boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$.

Q. 4 *Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer* $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2$ *avec* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Q. 1 *Ecrire une fonction* VecZeros *retournant le vecteur nul de* $\mathbb{R}^n$.

Q. 2 *Ecrire une fonction* VecConst *retournant le vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *dont toutes les composantes valent* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q. 3 *Soient* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ecrire une fonction* VecPlusConst *retournant le vecteur de* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i + \alpha.$$ [a]

[a] Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire mathématiquent, on ne peut pas écrire $\boldsymbol{u} + \alpha$!

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique rand() retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 *Ecrire une fonction* VecRand *retournant un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur* $[a, b]$.

Exercice 14

Q. 1 *Ecrire une fonction* MatZeros *retournant la matrice nulle de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2 *Ecrire une fonction* MatConst *retournant la matrice de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *dont toutes les composantes valent* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q. 3 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ecrire une fonction* MatPlusConst *retournant la matrice* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!], \quad \mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j} + \alpha.$$ [a]

[a] Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire mathématiquent, on ne peut pas écrire $\mathbb{A} + \alpha$!

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique rand() retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 *Ecrire une fonction* MatRand *retournant une matrice de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur* $[a, b]$.

Exercice 15

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 1

a. *Ecrire une fonction algorithmique* setMatCol *permettant d'initialiser le* j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{A}$ *par un vecteur* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, *avec* $j \in [\![1, n]\!]$.

b. *Ecrire une fonction algorithmique* getMatCol *retournant le* j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{A}$ *avec* $j \in [\![1, n]\!]$.

Q. 2

a. *Ecrire une fonction algorithmique* setMatRow *permettant d'initialiser le* i*-ème vecteur ligne de* $\mathbb{A}$ *par un vecteur* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, *avec* $i \in [\![1, m]\!]$.

b. *Ecrire une fonction algorithmique* getMatRow *retournant le* i*-ème vecteur ligne de* $\mathbb{A}$ *avec* $i \in [\![1, m]\!]$.

Exercice 16

Q. 1

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *Ecrire une fonction* aApbB *permettant de calculer la matrice* $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}$.

Q. 2

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\boldsymbol{u}$ *un vecteur (colonne).*

a. *A quelle(s) condition(s) le produit de la matrice* $\mathbb{A}$ *par le vecteur* $\boldsymbol{u}$ *existe-t'il?*

b. *Sous les conditions précédentes, on note* $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

- *A quel espace appartient* $\boldsymbol{v}$?
- *Rappeler précisement la formule permettant de calculer les composantes de* $\boldsymbol{v}$.

c. *Ecrire une fonction* ProdMatVec *permettant de calculer* $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

d. *Donner un exemple algorithmique d'utilisation.*

Exercice 17

Q. 1

Soient $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *Ecrire la fonction* `ProdSca` *permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs noté mathématiquement* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

L'objectif de la suite de l'exercice est de voir plusieurs manières de programmer le produit d'une matrice par un vecteur. Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

b. *Ecrire la fonction* ProdMatVec *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

Voici quelques notations mathématiques (non standards) que l'on va utiliser. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$.

On suppose que l'on dispose des commandes suivantes au niveau algorithmique:

Description	*Avec fonction*	*Instruction simplifiée*
Obtenir la j-ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $j \in [\![1, n]\!]$, math. noté $\mathbb{A}_{:,j}$	$\boldsymbol{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\boldsymbol{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$
Obtenir la i-ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $i \in [\![1, m]\!]$, math. noté $\mathbb{A}_{i,:}$	$\boldsymbol{v} \leftarrow \text{getMatRow}(\mathbb{A}, i)$	$\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}(i, :)$
Remplacer la j-ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ avec $j \in [\![1, n]\!]$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \boldsymbol{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \boldsymbol{u}$
Remplacer la i-ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in [\![1, m]\!]$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatRow}(\mathbb{A}, \boldsymbol{v}, j)$	$\mathbb{A}(i, :) \leftarrow \boldsymbol{v}$.

Table 1: Instructions algorithmiques pour accéder/modifier une ligne ou une colonne d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 3

a. *Sous les hypothèses de* **Q.2** *et avec* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$*, écrire mathématiquement* $\boldsymbol{v}_i$ *comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées ci-dessus.*

b. *Ecrire la fonction* ProdMatVecFun *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* ProdSca *et les fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées).*

c. *Ecrire la fonction* ProdMatVecSim *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* ProdSca *et les instructions simplifiées de la Table 1 (i.e. sans utiliser les fonctions).*

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Q. 4

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. *Ecrire la fonction* ProdMatMat *permettant de retourner* $\mathbb{G}$.

Q. 5

Sous les hypothèses trouvées en **Q.4***, on note* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

a. *En utilisant les notations mathèmatiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire* $\mathbb{G}_{i,j}$ *comme un produit scalaire entre un vecteur ligne de* $\mathbb{A}$ *et un vecteur colonne de* $\mathbb{B}$.

b. *Ecrire la fonction* ProdMatMatFun1 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.5** a.*, des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction* ProdSca.

c. *Ecrire la fonction* ProdMatMatSim1 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.5** a.*, des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction* ProdSca.

Q. 6

Sous les hypothèses trouvées en **Q.4***, on note* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

a. *En utilisant les notations mathèmatiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire* $\mathbb{G}_{:,j}$ *(*j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{G}$*) comme le produit de la matrice* $\mathbb{A}$ *par un vecteur colonne de* $\mathbb{B}$.

b. *Ecrire la fonction* ProdMatMatFun2 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.6** a.*, des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction* ProdMatVecFun.

c. *Ecrire la fonction* ProdMatMatSim2 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.6** a.*, des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction* ProdMatVecSim.