

*Analyse Numérique I :  
Résolution de systèmes linéaires  
Méthodes directes\**

## 1 Conditionnement

**Définition 1.1.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière  $A$ , associé à cette norme, est le nombre

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Nous noterons  $\text{cond}_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ .

**Proposition 1.2.** Soit  $A$  une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ .
2.  $\text{cond}_p(A) \geq 1, \forall p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ .
3.  $\text{cond}_2(A) = 1$  si et seulement si  $A = \alpha Q$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  et  $Q$  matrice unitaire

**Théorème 1.3.** Soit  $A$  une matrice inversible. Soient  $x$  et  $x + \Delta x$  les solutions respectives de

$$Ax = b \quad \text{et} \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Supposons  $b \neq 0$ , alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice  $A$  donnée, on peut trouver des vecteurs  $b \neq 0$  et  $\Delta b \neq 0$  tels qu'elle devienne une égalité.

**Théorème 1.4.** Soient  $A$  et  $A + \Delta A$  deux matrices inversibles. Soient  $x$  et  $x + \Delta x$  les solutions respectives de

$$Ax = b \quad \text{et} \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b.$$

Supposons  $b \neq 0$ , alors on a

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

**Remarque.** Une matrice est donc **bien conditionnée** si son conditionnement est proche de 1.

\*Compilé le 2025/10/24 à 07:53:46.

## 2 Méthodes directes

### 2.1 Résultats préliminaires

**Lemme 2.1** (matrice de permutation 3.1.2 p.69). Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . On note  $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice identité dont on a permuté les lignes  $i$  et  $j$ . Alors la matrice  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$  est symétrique et orthogonale. Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

1. la matrice  $\mathbb{P}_n^{[i,j]}A$  est matrice  $A$  dont on a permuté les **lignes**  $i$  et  $j$ ,
2. la matrice  $A\mathbb{P}_n^{[i,j]}$  est matrice  $A$  dont on a permuté les **colonnes**  $i$  et  $j$ ,

**Lemme 2.2** (matrice d'élimination 3.1.1 p.67). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $A_{1,1} \neq 0$ . Il existe une matrice  $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure à diagonale unité telle que

$$EA\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (1)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

**Théorème 2.3** (décomposition de Schur ★★★★★ 3.1.1 p.63). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe une matrice unitaire  $U$  et une matrice triangulaire supérieure  $T$  telles que

$$A = UTU^* \quad (2)$$

### 2.2 Méthode de Gauss-Jordan

**Proposition 2.4.** Soit  $A$  une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible  $G$  telle que  $GA$  soit triangulaire supérieure.

### 2.3 Factorisation LU

**Théorème 2.5** (Factorisation LU ★★★★★ 3.1.4 p.76). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe

- une unique matrice  $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure (lower triangular en anglais) à diagonale unité,
- une unique matrice  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure (upper triangular en anglais) inversible

telles que

$$A = LU.$$

**Corollaire 2.6** (★★★★★ 3.1.1 p.78). Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation LU.

**Théorème 2.7** (Factorisation LU avec permutations ★★★★★ 3.1.5 p.78). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice inversible. Il existe une matrice  $P$ , produit de matrices de permutation, une matrice  $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure inversible telles que

$$PA = LU. \quad (3)$$

## 2.4 Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

**Théorème 2.8** (Factorisation  $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$  ★★★★★ 3.1.6 p.84). Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation  $\mathbb{L}\mathbb{U}$ . Alors  $\mathbb{A}$  s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^* \quad (4)$$

où  $\mathbb{D} = \text{diag } \mathbb{U}$  est une matrice à coefficients réels.

**Corollaire 2.9** (★★★★★ 3.1.2 p.84). Une matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet une factorisation  $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$  avec  $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et  $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice  $\mathbb{A}$  est hermitienne définie positive.

## 2.5 Factorisation de Cholesky

**Définition 2.10** (3.1.1 p.84). Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une factorisation  $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$  où  $\mathbb{B}$  est une matrice triangulaire inférieure inversible. Si les coefficients diagonaux de  $\mathbb{B}$  sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.

**Théorème 2.11** (Factorisation de Cholesky ★★★★★ 3.1.7 p.84). La matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice  $\mathbb{A}$  est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.

## 2.6 Factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$

**Définition 2.12** (Matrice élémentaire de Householder 3.1.2 p.90). Soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice  $\mathbb{H}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par

$$\mathbb{H}(\mathbf{u}) = \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*. \quad (5)$$

**Propriété 2.13** (3.1.1 p.90). Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.

**Propriété 2.14** (3.1.2 p.90). Soient  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ ,  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . On note  $\mathbf{x}_{\parallel} = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$  et  $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$ . On a alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}_{\parallel}) = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}. \quad (6)$$

et

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{si } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (7)$$

**Théorème 2.15** (3.1.8 p.90). Soient  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  deux vecteurs non nuls et non colinéaires de  $\mathbb{C}^n$  avec  $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$  et  $\arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [\pi]$ . On a alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (8)$$

**Corollaire 2.16** (3.1.3 p.94). Soit  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$  non nul et non colinéaire à  $\mathbf{e}_1$ , premier vecteur de la base canonique

de  $\mathbb{C}^n$ . Alors, le vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  donné par

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{a}_1)} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{a}_1)} \mathbf{e}_1\|_2}$$

est bien défini et on a

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(\mathbf{a}_1)} \mathbf{e}_1. \quad (9)$$

**Lemme 2.17.** Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$  la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array} \right)$$

où  $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ , premier vecteur colonne de  $\mathbb{V}$ , est non nul et non colinéaire à  $\mathbf{e}_1^n$ , premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

Alors  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  est bien défini par

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha \mathbf{e}_1^n}{\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha \mathbf{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = -\|\mathbb{V}_{1,:}\|_2 e^{i \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

et on a

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{V}_{1,:} = \alpha \mathbf{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*.$$

De plus, en posant  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$ , on a

$$\mathbb{H}(\mathbf{w})\mathbb{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbb{V} \end{array} \right)$$

**Théorème 2.18** (Factorisation QR  3.1.9 p.95). Soit  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice. Il existe une matrice unitaire  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}. \quad (10)$$

Si  $\mathbb{A}$  est réelle alors  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  sont aussi réelles et l'on peut choisir  $\mathbb{Q}$  de telle sorte que les coefficients diagonaux de  $\mathbb{R}$  soient positifs. De plus, si  $\mathbb{A}$  est inversible alors la factorisation est unique.