

EXERCICE 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $N \in \mathbb{N}$ et $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_i = a + i \frac{b-a}{N}$, ensemble des points de la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas (ou $N + 1$ points).

Q. 1

Écrire une fonction **DisReg** permettant de retourner l'ensemble des $(x_i)_{i=0}^N$.

Soient $t^0 = 1$, $T = 10$ et $N = 100$.

Q. 2

En utilisant la fonction **DisReg**, écrire un programme permettant d'obtenir l'ensemble des $(t^n)_{n=0}^N$ correspondant à la discrétisation régulière de l'intervalle $[t^0, t^0 + T]$ avec N pas.

Correction

R. 1

Soient $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ une discrétisation régulière de $[a, b]$, on a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, x_i = a + ih, \text{ avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

Au niveau algorithmique, on stocke les $(N + 1)$ réels dans un vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ (i.e. tableau 1D de réels à $(N + 1)$ éléments) représenté par la variable **tx** (tableau des x_i). Tout autre choix de nom de variable (hors données) est possible et en particulier, **x**. Toutefois, pour ne pas le confondre avec la variable mathématique x utilisée pour la suite des $(x_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ nous avons opté pour le nom **tx**.

Une représentation mémoire est donnée en Figure 1.



Figure 1: Représentation mémoire de la variable algorithmique $\mathbf{tx}$ contenant la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec $(N + 1)$ points notée $(x_i)_{n=0}^N$.

On peut noter le lien entre la variable algorithmique $\mathbf{tx}$ et la notation mathématique x_i :

$$\mathbf{tx}(i + 1) = x_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad \text{ou} \quad \mathbf{tx}(i) = x_{i-1}, \quad \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$$

On a donc

$$\mathbf{tx}(i + 1) = a + ih, \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad \text{ou} \quad \mathbf{tx}(i) = a + (i - 1)h, \quad \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket.$$

Algorithme 1 Fonction **DisReg** : discrétisation régulière de $[a, b]$ avec $(N + 1)$ points

Données : a, b : deux réels, ($a < b$)

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : **tx** : vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{tx}(i) = x_{i-1} = a + (i - 1)h$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$ et $h = \frac{b-a}{N}$.

```
1: Fonction tx  $\leftarrow$  DisReg(  $a, b, N$  )
2:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $N + 1$  faire
4:      $\mathbf{tx}(i) \leftarrow a + (i - 1) * h$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction
```

D'autres variantes à cette fonction existent, en voici 2:

```
1: Fonction tx  $\leftarrow$  DisRegV1(  $a, b, N$  )
2:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 0$  à  $N$  faire
4:      $\mathbf{tx}(i + 1) \leftarrow a + i * h$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction
```

```
1: Fonction tx  $\leftarrow$  DisRegV2(  $a, b, N$  )
2:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
3:    $\mathbf{tx}(1) \leftarrow a$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 2$  à  $N + 1$  faire
5:      $\mathbf{tx}(i) \leftarrow \mathbf{tx}(i - 1) + h$ 
6:   Fin Pour
7: Fin Fonction
```

R. 2

On choisi de stocker l'ensemble des $(t^n)_{n=0}^N$ dans un tableau 1D nommé tt.

tt $\leftarrow$ DisReg(1, 11, 100)

ou

- 1: $t0 \leftarrow 1, T \leftarrow 10, N = 100$
- 2: tt $\leftarrow$ DisReg($t0, t0 + T, N$)

ou

- 1: $t0 \leftarrow 1, T \leftarrow 10, N = 100$
- 2: $a \leftarrow t0, b \leftarrow t0 + T$
- 3: tt $\leftarrow$ DisReg(a, b, N)

ou

- 1: $t0 \leftarrow 1, T \leftarrow 10, N = 100$
- 2: $A \leftarrow t0, B \leftarrow t0 + T$
- 3: tt $\leftarrow$ DisReg(A, B, N)

ou ...

