Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2 * \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{P-1}$$

Q. 1 *Montrer que si* α *et* $\boldsymbol{u}$ *vérifient* (P-1) *alors*

a. on a

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{P-2}$$

b. on a

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b} \tag{P-3}$$

c. on en déduit que

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{2} \tag{P-4}$$

□

R. 1 Par la suite, on pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ pour alléger les notations.

a. On a

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle &= \langle \mathbb{H}^*\mathbb{H}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire}\\ &= \langle \mathbb{H}\boldsymbol{a}, \mathbb{H}\boldsymbol{a}\rangle \quad \text{par définition du produit scalaire}\\ &= \|\mathbb{H}\boldsymbol{a}\|_2^2 = \|\alpha\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2\,\|\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2.\end{aligned}$$

b. Pour établir (P-3), on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}\\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{b}\\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

c. En effectuant le produit scalaire (à gauche) avec $\boldsymbol{a}$ de (P-3), on obtient

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$$

ce qui prouve (P-4).

Nous allons maintenant établir une condition pour que (P-4) ait un sens.

Q. 2 *On suppose que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$

a. Montrer que $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

□

R. 2 a. On a par définition de l'argument $\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg \alpha}$ et $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| e^{\imath \arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)}$ ce qui donne

$$\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = |\alpha| |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| e^{\imath(\arg \alpha + \arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle))} \tag{P-5}$$

et donc $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ est réel si $\arg \alpha + \arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) = 0 \ [\pi]$.

b. On vient de demontrer que $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$ et donc $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle > 0$.

- Si $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \pi \ [2\pi]$, alors de (P-5) on obtient $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant 0$ et donc $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \geqslant \|\boldsymbol{a}\|_2 > 0$ car $\boldsymbol{a} \neq 0$.
- Si $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) \ [2\pi]$, alors de (P-5) on obtient $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \geqslant 0$.
  Comme les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

  $$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| < \|\boldsymbol{a}\|_2 \|\boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2 .$$

  On obtient donc

  $$0 \leqslant \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant |\alpha| |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| < |\alpha| \|\boldsymbol{a}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2^2$$

  Attention, dans ce cas $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ peut-être très petit.

Q. 3 *Soient* α *et* $\boldsymbol{u}$ *vérifiant* (P-1). *En déduire que si* $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) \ [\pi]$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}). \tag{P-6}$$

et $\|u\|_2 = 1$. □

R. 3 On peut noter que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \neq 0$ car sinon, d'après (P-3), $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$ or par hypothèse $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont non colinéaires. On obtient alors immédiatement (P-6) à partir de (P-3)

Vérifions que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On a

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \frac{1}{4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle|^2} \langle \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b} \rangle$$

En utilisant (P-4), on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle|^2 &= 2(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b} \rangle &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + |\alpha|^2 \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + |\alpha|^2 \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \quad \text{car } \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \overline{(\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)} = \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

