Exercice 13

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Expliquer comment construire une matrice* $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *unitaire, produit d'au plus* $n-1$ *matrices élémentaires de Householder, et,* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *triangulaire supérieure telles* $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$. ▫

R. 1

Remarque 1. *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $j \in \mathcal{M}_1(n)$. *On dit que la colonne* j *de* $\mathbb{A}$ *est colonne supérieure si,* $\forall i \in [\![j+1, n]\!]$, $A_{i,j} = 0$, *c'est à dire*

$$\mathbb{A}_{:,j} = \text{Vect}\left(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j\right).$$

En notant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$, l'idée générale est la suivante:
Pour j allant successivement de 1 à $n-1$, on va déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure sans modifier les colonnes 1 à j de $\mathbb{A}^{[j-1]}$.

Etape 1: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}^{[0]}$ soit colonne supérieure .

- Si $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$ alors on prend $\mathbb{H}^{[1]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.

- Sinon, $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$: on est sous les hypothèse du avec $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$.
  On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ donné par

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1\right\|_2}$$

on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} = -\left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)$ et $\alpha_1 = -\left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}_1\mathbb{A}^{[0]} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \bullet\cdots\cdots\bullet \\ \hline 0 & \bullet\cdots\cdots\bullet \\ \vdots & \vdots\quad\ddots\quad\vdots \\ 0 & \bullet\cdots\cdots\bullet \end{array}\right).$$

Etape 2: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[2]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 2 de $\mathbb{A}^{[2]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]}$ soit colonne supérieure sans modifier la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]}$. Pour celà on va utiliser le en posant

$$\mathbb{A}^{[1]} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{U} = \alpha_1,\ \mathbb{E} = \mathbb{O}_{n-1,1},\ \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[1]}_{1,2:n},\ \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[1]}_{2:n,2:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^{n-1}$, alors on pose $\mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, et le corollaire peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ donné par

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2\boldsymbol{e}_1^{n-1}}{\left\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2\boldsymbol{e}_1^{n-1}\right\|} \text{ avec } \alpha_2 = -\left\|\mathbb{V}_{1,:}\right\|_2 e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1^{n-1}$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \bullet\cdots\cdots\bullet \\ \hline 0 & \bullet\cdots\cdots\bullet \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & \bullet\cdots\cdots\bullet \end{array}\right).$$

De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \\ \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_2) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2) \\ 0 & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

on a

$$\mathbb{A}^{[2]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbb{F} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \\ 0 & \end{array}\right)$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[2]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions 2 et $n-2$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[2]} = \left(\begin{array}{cc|c} \overset{2}{\alpha_1} & \bullet & \overset{n-2}{\bullet\cdots\cdots\bullet} \\ 0 & \alpha_2 & \bullet\cdots\cdots\bullet \\ \hline 0 & 0 & \bullet\cdots\cdots\bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & 0 & \bullet\cdots\cdots\bullet \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 2 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-2 \end{array}$$

...

Etape j: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure tout en ayant les $(j-1)$ premières colonnes identiques à celles $\mathbb{A}^{[j-1]}$.
Pour celà on utilise le en posant, $p = j-1$, $q = n-p$ et

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{j-1} \end{pmatrix}, \ \mathbb{E} = \mathbb{O}_{q,p}, \ \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{1:p,j:n}, \ \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$, alors on prend $\mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, et le Lemme peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{C}^q$ donné par

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q}{\left\| \mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q \right\|} \text{ avec } \alpha_j = -\left\| \mathbb{V}_{1,:} \right\|_2 e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_j & \bullet \cdots \bullet \\ \hline 0 & \bullet \cdots \bullet \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & \bullet \cdots \bullet \end{array}\right).$$

De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_j = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_p \\ \hline \\ \boldsymbol{u}_j \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_j) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j) \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

on a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \\ \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \\ \\ \end{array}\right).$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[j]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions j et $n-j$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[j]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\alpha_1 \quad \bullet \quad \bullet}}^{j} & \overbrace{\hphantom{\bullet \quad \bullet}}^{n-j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & \alpha_j & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \updownarrow j \\ \\ \updownarrow n-j \end{array}$$

Etape $n-1$: faire l'Etape j avec $j = n-1$.

Au final, on a donc

$$\mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]} \mathbb{A} = \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure, et, les matrices $\mathbb{H}^{[j]}$, $j \in [\![1, n-1]\!]$ sont, soit la matrice identité, soit une matrice élémentaire de Householder: elles sont donc unitaires.
On note $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]}$, cette matrice est donc le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder. Comme le produit de matrices unitaires reste une matrice unitaire, on a $\mathbb{H}$ unitaire et

$$\mathbb{A} = \mathbb{H}^* \mathbb{R}.$$

On pose $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$. La matrice $\mathbb{Q}$ est alors unitaire et on a

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{H}^{[1]}\right)^* \dots \left(\mathbb{H}^{[n-1]}\right)^*.$$

Les matrices élémentaires de Householer étant hermitiennes, on obtient

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \dots \mathbb{H}^{[n-1]}$$

et donc $\mathbb{Q}$ est aussi le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder.

Q. 2 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{QR}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction MatHouseholder .

□

R. 2

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

1: Calculer $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

1: Calculer $\mathbb{H}^{[1]}$ à $\mathbb{H}^{[n-1]}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

1: Calculer $\mathbb{H}^{[1]}$ à $\mathbb{H}^{[n-1]}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: Calculer $\mathbb{H}^{[j]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]}$
5: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
6: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
7: **Fin Pour**
8: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Etape j**:** On suppose les $j-1$ premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j-1]}$ sous forme triangulaire supérieure.

On pose $p = j-1$, $q = n-p$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en 2×2 blocs:

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \begin{matrix} p & q \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$$

avec, par hypothèse, $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure et $\mathbb{E}$ matrice nulle.

Pour calculer $\mathbb{H}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on défini le vecteur $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$ comme étant le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$. On note $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{C}^q$, le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$.

- Si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$, i.e. $\boldsymbol{v}$ est nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, alors $\mathbb{H}^{[j-1]} = \mathbb{I}_n$. On a alors
$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} = \mathbb{A}^{[j-1]}$$
et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.
- Sinon, en utilisant le , on défini le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par
$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$
et, la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ vérifie alors
$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1.$$
En posant
$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$
où la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ est donnée par
$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_n - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \end{array}\right).$$
On a alors
$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right)$$
et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

Pour déterminer la matrice $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de connaitre $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$. On va donc utiliser une fonction réalisant cette opération dans l'algorithme de factorisation $\mathbb{QR}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: Calculer $\mathbb{H}^{[j]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]}$
5: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
6: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
7: **Fin Pour**
8: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j}$
5: $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
6: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
7: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
8: **Fin Pour**
9: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

La fonction MatHouseholder4QRstep étant donnée par:

Algorithme 2 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder4QRstep$(\boldsymbol{v}, n)$.

A partir d'un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$, retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$ (i.e. $\boldsymbol{v}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon, en définissant $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$

  on prend $\mathbb{S}$ comme étant la matrice élémentaire de Householder:

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \text{ avec } \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Données : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$,
n : dimension de
Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe.

1: **Fonction** $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder4QRstep($\boldsymbol{v}, n$)
2: $\quad \boldsymbol{e} \leftarrow \boldsymbol{0}_q$, $\boldsymbol{e}(1) \leftarrow 1$
3: $\quad [\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}, 1)$
4: $\quad \mathbb{S} \leftarrow$ eye(n)
5: $\quad$ **Si** $\alpha \neq 0$ **alors**
6: $\quad\quad p \leftarrow n - q$
7: $\quad\quad I \leftarrow p + 1 : n$
8: $\quad\quad \mathbb{S}(I, I) \leftarrow \mathbb{H}$
9: $\quad$ **Fin Si**

Bien évidemment, on peut simplifier/améliorer l'écriture de l'Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$ en ne stockant pas les suites de matrices:

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j}$
  $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow \mathrm{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
  $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{R}_{j:n,j}$
  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \mathrm{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
  Si $\alpha \neq 0$ **alors** ▷ Sinon $\mathbb{H} = \mathbb{I}$!
    $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{R}$
    $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}$
  Fin Si
Fin Pour

Voici (enfin) l'agorithme final:

Algorithme 1 Fonction FactQR

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1: **Fonction** $[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow$ FactQR($\mathbb{A}$)
2: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
4: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
5: $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{R}(j:n, j)$
6: $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder4QRstep$(\boldsymbol{v}, n)$
7: **Si** $\alpha \neq 0$ **alors** ▷ Sinon $\mathbb{H} = \mathbb{I}$!
8: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{R}$
9: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}$
10: **Fin Si**
11: **Fin Pour**
12: **Fin Fonction**

Q. 3 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:*

- MatRand(m, n) *retournant une matrice aléatoire de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme* $[0, 1]$.
- NormInf$(\mathbb{A})$ *retournant la norme infinie d'une matrice carrée* $\mathbb{A}$.

□

R. 3 1: $\mathbb{A} \leftarrow \text{MatRand}(50, 50)$
2: $[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow \text{FactQR}(\mathbb{A})$
3: $\text{err} \leftarrow \text{NormInf}(\mathbb{A} - \mathbb{Q} * \mathbb{R})$ ▻ doit être très petit!

