## Exercice 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array} \right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

**Q. 1** *Expliciter, en fonction de* $\boldsymbol{v}$, *le vecteur* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, *tel que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{e}_1^n, \quad \textit{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

□

---

**R. 1** On a

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\delta\pi - \arg\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n \rangle)}, \ \delta \in \{0, 1\}.$$

Comme $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n \rangle = \overline{v_1}$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, on obtient

$$\alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\arg(v_1) + \delta\pi)}$$

ce qui donne avec le choix $\delta = 1$

$$\alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(v_1)}.$$

**Q. 2** *Soient* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ *et* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. *On pose* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. *Déterminer* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ *en fonction de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ *et de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$. □

---

**R. 2** On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) &= \mathbb{I}_{m+n} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{H}(\boldsymbol{x}) & -2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline -2\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \mathbb{H}(\boldsymbol{y}) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

---

**Q. 3** *On pose* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.

*a. Déterminer* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ *en fonction de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

*b. Que peut-on dire de particulier sur le bloc* $(2,2)$ *de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?

□

**R. 3** a. De la question précédente, on déduit

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right). \end{aligned}$$

b. le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ correspond à la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne vaut $\alpha \boldsymbol{e}_1^n$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \hline 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \vdots & \vdots \quad \iddots \quad \vdots \\ 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \end{array}\right).$$

