Théorème. *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A}$ *deux matrices inversibles. Soient* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}$ *les solutions respectives de*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \text{ et } (\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, *alors on a*

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|}\leqslant \mathrm{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Proof. On a

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}=(\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\mathbb{A}\boldsymbol{x}+\mathbb{A}\boldsymbol{\Delta x}+\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})$$

et donc

$$\mathbb{A}\boldsymbol{\Delta x}+\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})=\boldsymbol{0}\iff \boldsymbol{\Delta x}=-\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})$$

On en déduit alors

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\|=\left\|\mathbb{A}^{-1}\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})\right\|\leqslant\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|\|\Delta\mathbb{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x})\|\leqslant\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|\|\Delta\mathbb{A}\|\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|$$

De plus, on a $\mathrm{cond}(\mathbb{A})\overset{\text{def}}{=}\|\mathbb{A}\|\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|$ et donc $\left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|=\frac{\mathrm{cond}(\mathbb{A})}{\|\mathbb{A}\|}$ ce qui donne

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\|\leqslant\mathrm{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|.$$

Comme $\boldsymbol{b}\neq 0$, on a $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}=(\mathbb{A}+\Delta\mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b}\neq 0$ et de l'inégalité précédente, on déduit alors

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|}\leqslant\mathrm{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

□

