Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*[*]
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes directes

Références

[1] F. Cuvelier, *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*, Polycopié (téléchargement), 2025.

[2] F. Cuvelier, *Analyse numérique I, rappels algèbre linéaire, résumé.*, 2026. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/26-27/rappels_Algebre_Lineaire_2x1.pdf`.

1 Exercices cours

Exercice 1 : Résolution système triangulaire supérieur [C]

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Expliquer comment calculer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de $\boldsymbol{x}$.* ▫

R. 1 On veut résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on peut calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$, car il est possible de calculer x_i si on connait $x_{i+1}, \dots, x_n$: c'est la **méthode de remontée**. En effet, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i,$$

et donc, par définition d'un produit matrice-vecteur,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i.$$

Comme $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire supérieure, on a (voir Définition B.2.24 dans [1] et [2])

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ i > j, \quad A_{i,j} = 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad b_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j + A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j \\ &= A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j. \end{aligned} \tag{1.1}$$

---

[*]Compilé le 2026/11/16 à 11:44:41.

Q. 2 *Ecrire la fonction* ResTriSup *permettant de résoudre le système triangulaire supérieur* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ▫

R. 2

Algorithme 1 $\mathcal{R}_0$

1: Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en calculant successivement $x_n,\ x_{n-1},\ \ldots, x_1$.

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \ldots, x_n$ à l'aide de l'équation (1.1)
3: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: Calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \ldots, x_n$ à l'aide de l'équation (1.1)
3: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j$
3: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j$
3: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin Pour**

Algorithme 1 $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: $S \leftarrow 0$
3: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
4: $S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
5: **Fin Pour**
6: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
7: **Fin Pour**

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 1 Fonction ResTriSup permettant de résoudre le système linéaire triangulaire supérieur inversible $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
1: Fonction x ← ResTriSup( A, b )
2:   Pour i ← n à 1 faire(pas de −1)
3:     S ← 0
4:     Pour j ← i + 1 à n faire
5:       S ← S + A(i, j) ∗ x(j)
6:     Fin Pour
7:     x(i) ← (b(i) − S)/A(i, i)
8:   Fin Pour
9: Fin Fonction
```

Exercice 2 : Matrice de permutation [C]

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.* ▫

R. 1 On note, dans toute la correction, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut définir cette matrice par ligne,

$$\begin{cases} \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, & P_{r,s} = \delta_{r,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ & P_{i,s} = \delta_{j,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ & P_{j,s} = \delta_{i,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!]. \end{cases}$$

ou par colonne

$$\begin{cases} \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, & P_{r,s} = \delta_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,i} = \delta_{r,j}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,j} = \delta_{r,i}, & \forall r \in [\![1,n]\!]. \end{cases}$$

Attention 1. *Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique. Pour la représentation, on suppose $i < j$. On effectue une représentation bloc 5×5 avec des blocs diagonaux carrés sachant que tous les blocs non décrits sont nuls:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overset{i-1}{\longleftrightarrow} & i & \overset{j-i-1}{\longleftrightarrow} & j & \overset{n-j}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbb{I} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \mathbb{I} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \mathbb{I} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow i-1 \\ i \\ \updownarrow j-i-1 \\ j \\ \updownarrow n-j \end{array}$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2 *a. Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

b. Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.

□

R. 2 a. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} P_{r,k} A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{cases} D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ D_{i,s} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_{r,:} = \boldsymbol{A}_{r,:}, & \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ \boldsymbol{D}_{i,:} = \boldsymbol{A}_{j,:}, \\ \boldsymbol{D}_{j,:} = \boldsymbol{A}_{i,:}. \end{cases}$$

Note 1. *La notation $\boldsymbol{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1}, \ldots, D_{i,n})$ et $\boldsymbol{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne* $\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$

b. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} P_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} P_{s,k}.$$

Attention 2. *Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{cases} E_{r,s} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ E_{r,i} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{:,s} &= \boldsymbol{A}_{:,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ \boldsymbol{E}_{:,i} &= \boldsymbol{A}_{:,j}, \\ \boldsymbol{E}_{:,j} &= \boldsymbol{A}_{:,i}. \end{cases}$$

Q. 3 *a. Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

□

R. 3 a. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

b. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

Exercice 3 : Matrice d'élimination [C]

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -v_2/v_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \tag{3.1}$$

Q. 1 *a. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

□

R. 1 a. La matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (Proposition B.2.8 de [1]) On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) = 1$.

b. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)$$

avec $\boldsymbol{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right)$$

avec $a \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 \times a & 1 \times \boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \times \mathbb{D} \\ \hline \boldsymbol{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}}, \quad a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{n-1}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -\boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2 *a. Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

b. En déduire que la première colonne de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^{\mathsf{t}}$ i.e.

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

□

R. 2 a. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}_1$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{1,:} = \boldsymbol{A}_{1,:}. \tag{3.3}$$

Pour $i \geqslant 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in [\![2,n]\!]$. On obtient alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} E_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} \delta_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in [\![2,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,j},\ \forall j \in [\![1,n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1}\boldsymbol{A}_{1,:} + \boldsymbol{A}_{i,:} \tag{3.4}$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hline \boldsymbol{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \end{pmatrix}$$

b. De (3.3), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (3.4) on obtient pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1,0,\dots,0)^{\mathsf{t}}$.

Exercice 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique [C]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha \boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.* □

R. 1 D'après le Lemme 3.1.1 de [1], si $A_{1,1} \neq 0$, le résultat est immédiat.
Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice $\mathbb{A}$ est inversible, il existe au moins un $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $A_{p,1} \neq 0$. On peut même choisir le premier indice p tel que $|A_{p,1}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |A_{i,1}| > 0$ (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[1,p]}$ la matrice de permutation des lignes 1 et p (voir Lemme 3.1.2 de [1]). On a alors

$$|\det \mathbb{P}| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}.$$

Par construction $(\mathbb{P}\mathbb{A})_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$, et on peut alors appliquer le Lemme 3.1.1 de [1] à la matrice $(\mathbb{P}\mathbb{A})$ pour obtenir l'existence d'une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det \mathbb{E} = 1$ et telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}\mathbb{A})\boldsymbol{e}_1 = A_{p,1}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{P}$ et $\alpha = A_{p,1}$, on obtient bien $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$. De plus, on a

$$|\det \mathbb{G}| = |\det(\mathbb{E}\mathbb{P})| = |\det \mathbb{E} \times \det \mathbb{P}| = 1.$$

Remarque. *La matrice $\mathbb{G}$ étant inversible, on a*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{G}\boldsymbol{b}$$

ce qui correspond à la première permutation/élimination de l'algorithme de Gauss-Jordan.

Q. 2 a. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

b. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

□

R. 2 a. On veut démontrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$, la propriété suivante

$(\mathcal{P}_n)$

$\forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\exists \mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\det \mathbb{S}_n| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{S}_n\mathbb{A}$ soit une triangulaire supérieure inversible.

Initialisation : Pour $n = 2$. Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_2| = 1$ et $\mathbb{G}_2\mathbb{A}_2\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2\mathbb{A}_2$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices $\mathbb{G}_2$ et $\mathbb{A}_2$ étant inversible, leur produit $\mathbb{U}_2$ l'est aussi. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est donc vérifiée avec $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.
Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et $\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{e}_1 = \alpha_n\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n\mathbb{A}_n$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array}\right) \overset{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}^*_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{G}_n$ et $\mathbb{A}_n$ sont inversibles, $\mathbb{V}_n$ l'est aussi. On en déduit donc que $\mathbb{B}_{n-1}$ est inversible car $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$ et $\alpha_n \neq 0$.
On peut donc utiliser la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ (hyp. de récurrence) sur la matrice $\mathbb{B}_{n-1}$: il existe donc $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, avec $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}$ soit une triangulaire supérieure inversible.
Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On a alors

$$\mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}^*_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}^*_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}^*_{n-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n$$

La matrice $\mathbb{U}_n$ est triangulaire supérieure inversible car $\mathbb{U}_{n-1}$ l'est aussi et $\alpha_n \neq 0$.
On pose $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n$. On a donc

$$\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n.$$

De plus, comme on a $\det \mathbb{S}_n = \det \mathbb{Q}_n \times \det \mathbb{G}_n$, et $\det \mathbb{Q}_n = \det \mathbb{S}_{n-1}$, on obtient, en utilisant $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et l'hypothèse de récurrence $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, que

$$|\det \mathbb{S}_n| = 1.$$

Ceci prouve la véracité de la proposition $(\mathcal{P}_n)$.

b. Comme $\mathbb{S}_n$ est inversible, on a en multipliant à gauche le système par $\mathbb{S}_n$

$$\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{S}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b}$$

Pour déterminer le vecteur $\boldsymbol{x}$, on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?* ▫

R. 3 Si $\mathbb{A}$ est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir $\alpha \neq 0$. Cependant l'existence de la matrice $\mathbb{G}$ reste avérée.

Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice $\mathbb{U}_n$ n'est plus inversible.

Exercice 5 : Vers la factorisation $\mathbb{LU}$ [C]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$, sont inversibles. Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Correction Soit $n \geqslant 2$, on va démontrer par récurrence sur n la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i, sont inversibles, alors il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation: $n = 2$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $\Delta_1 = A_{1,1} \neq 0$ et $\Delta_2 = \mathbb{A}$ inversible. On va construire une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ E_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}$$

On a donc $U_{2,1} = 0 = E_{2,1}A_{1,1} + A_{2,1}$. Comme par hypothèse, $A_{1,1} \neq 0$, on a $E_{2,1} = -A_{2,1}/A_{1,1}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_{1,1} &= A_{1,1} = \det(\Delta_1), \\ U_{2,2} &= A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}A_{1,2} = \frac{A_{2,2}A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}} = \frac{\det \mathbb{A}}{U_{1,1}} = \frac{\det \Delta_2}{U_{1,1}}. \end{aligned}$$

Hérédité: Soit $n \geqslant 3$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. dont toutes les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ sont inversibles. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\boldsymbol{g} \in \mathbb{C}^{n-1}$. Comme les $n-1$ premières sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont les $n-1$ sous-matrices principales de $\mathbb{A}_{n-1}$, ces dernières sont, par hypothèse, inversibles. Par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{A}_{n-1}$, il existe une matrice $\mathbb{E}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure.

On va construire (si possible) une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{E}$ s'écrit sous forme bloc

$$\mathbb{E} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{X}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^{n-1}$.

On a alors

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{X}_{n-1}\boldsymbol{g} \\ \hline \boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \boldsymbol{f}^* & \boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g} + A_{n,n} \end{array}\right)$$

Pour que la matrice $\mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure, il faut que $\mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure et $\boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1}+\boldsymbol{f}^* = 0$. En choisissant $\mathbb{X}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}$, on a $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{A}_{n-1}$ étant inversible, on a $\boldsymbol{h}^* = -\boldsymbol{f}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{E}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{U}_{n-1} & \mathbb{E}_{n-1}\boldsymbol{g} \\ \hdashline 0 & A_{n,n} - \boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g} \end{array}\right) = \mathbb{U}.$$

On a donc construit une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, $\mathbb{E}$, telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. Par construction, on a

$$U_{i,j} = (\mathbb{U}_{n-1})_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$$

et donc, par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{U}_{n-1}$, on obtient

$$U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1}),\quad \forall i \in [\![1, n-1]\!].$$

De plus on a,

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{E}\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{E})\det(\mathbb{A}) \\ &= \det(\mathbb{A}) && \text{car } \mathbb{E} \text{ tri. inf. à diag. unité} \\ &= \det(\Delta_n). && \text{car } \Delta_n = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{U}) &= \prod_{k=1}^{n} U_{k,k} && \text{car } \mathbb{U} \text{ tri. sup.} \\ &= U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k} \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$, on en déduit que la matrice $\mathbb{U}$ est inversible (car $\mathbb{E}$ et $\mathbb{A}$ le sont), que ses coefficients sont non nuls et, en prenant le déterminant:

$$\det(\Delta_n) = U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}$$

et donc

$$U_{n,n} = \frac{\det(\Delta_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}}.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vraie.

Conclusion: On a démontré par récurrence que la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

◇

Exercice 6 : factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ [C]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que s'il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.* ▫

R. 1 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coeffcients diagonaux strictement positifs.
La matrice $\mathbb{A}$ est alors hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*)^* = (\mathbb{L}^*)^*\mathbb{D}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

De plus $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x}\rangle$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^*$ inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} D_{i,i}|y_i|^2 > 0$$

car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\boldsymbol{y} \neq 0$.
La matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.* ▫

R. 2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 3.1.1 de [1], la matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.
D'après le Théorème 3.1.6 de [1], la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ peut alors s'écrire sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ où $\mathbb{D}$ est diagonale à coefficients réels et $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité.
Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
Comme $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$. Or on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle$$

On note $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on rappelle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En choisissant $\boldsymbol{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1}\boldsymbol{e}_i \neq 0$, on obtient alors

$$\langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i} > 0.$$

Exercice 7 : factorisation de Cholesky [C]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que si $\mathbb{A}$ admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.* ▫

R. 1 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ avec $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
La matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}\mathbb{B}^*)^* = (\mathbb{B}^*)^*\mathbb{B}^* = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{A}.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{B}^*\boldsymbol{x} \rangle = \|\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}\|^2 > 0$$

car $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ ($\mathbb{B}^*$ inversible et $\boldsymbol{x} \neq 0$). Donc la matrice $\mathbb{A}$ est bien hermitienne définie positive.

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky.* ▫

R. 2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 3.1.2 de [1], il existe alors une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm\sqrt{D_{i,i}} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice $\mathbb{B}$ est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Q. 3 *On suppose que* $\mathbb{A}$ *est hermitienne définie positive.*

a. Montrer que $\mathbb{A}$ *admet une factorisation positive de Cholesky.*

b. Montrer que cette factorisation est unique.

□

R. 3 a. En choisissant, dans la question précédente,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad H_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}} > 0,$$

la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$ triangulaire inférieure a alors pour éléments diagonaux

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_{i,i} = H_{i,i} > 0.$$

b. Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique. On propose ici deux démonstrations.

- **1ère démonstration.**
  Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

  $$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2^*.$$

  En multipliant à gauche par $\mathbb{B}_2^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

  $$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2)^*$$

  En notant $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

  $$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \tag{7.1}$$

  Or, on a
  - Proposition B.2.8 de [1]: l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
  - Proposition B.2.7 de [1]: le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

  On en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
  De plus l'équation (7.1) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{G}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on en déduit

  $$(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$$

  et

  $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left(\mathbb{G}^{-1}\right)_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

  De l'équation (7.1), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$ et donc

  $$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{G}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

  On en déduit alors que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$ et donc

  $$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}$$

  c'est à dire $\mathbb{B}_2^{-1}$ est l'inverse de $\mathbb{B}_1$ qui est unique, donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.
- **2ème demonstration.**
  Soient $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

  $$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{C}\mathbb{C}^*.$$

  En multipliant à gauche par $\mathbb{C}^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}^*)^{-1}$ cette équation, on obtient

  $$\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B} = \mathbb{C}^*(\mathbb{B}^*)^{-1} = \mathbb{C}^*(\mathbb{B}^{-1})^* = (\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^* \tag{7.2}$$

  Or, on a

- Proposition B.2.8 de [1]: Soit $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible (ses coefficient diagonaux sont non nuls). Son inverse est aussi triangulaire inférieure et, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{T}^{-1}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{T}_{i,i}}$.
  On en déduit que les matrices $\mathbb{B}^{-1}$ et $\mathbb{C}^{-1}$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
- Proposition B.2.7 de [1]: Soient $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires inférieures. Alors $\mathbb{T}\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure et, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(\mathbb{T}\mathbb{L})_{i,i} = \mathbb{T}_{i,i}\mathbb{L}_{i,i}$.
  On en déduit que les matrices $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C}$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

De plus l'équation (7.2) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs. On en déduit, $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$\left(\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}\right)_{i,i} = \left((\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*\right)_{i,i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{C}^{-1}_{i,i}\mathbb{B}_{i,i} = \overline{\mathbb{B}^{-1}_{i,i}\mathbb{C}_{i,i}}$$

Comme les coefficients diagonaux sont réels, on obtient

$$\mathbb{C}^{-1}_{i,i}\mathbb{B}_{i,i} = \mathbb{B}^{-1}_{i,i}\mathbb{C}_{i,i}$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{B}^2_{i,i} = \mathbb{C}^2_{i,i}.$$

Or les coefficients diagonaux sont strictement positifs donc, on obtient

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{B}_{i,i} = \mathbb{C}_{i,i}.$$

On en déduit que les coefficients diagonaux des matrices diagonales $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}$ et $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*$ vérifient

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left(\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}\right)_{i,i} = \left((\mathbb{B}^{-1}\mathbb{C})^*\right)_{i,i} = 1.$$

Elles s'identifient donc à la matrice identité et on a alors $\mathbb{B} = \mathbb{C}$. Ce qui démontre l'unicité.

Exercice 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder [C]

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 1 *a. Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.*

b. Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.

□

R. 1 a. Cette matrice est hermitienne car

$$\mathbb{H}^* = (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* = \mathbb{H}.$$

b. La matrice $\mathbb{H}$ est unitaire si $\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{H} &= (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)(\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*) \\ &= \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$ et donc

$$\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^* = \mathbb{I}.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$.

Q. 2 *Montrer que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}.$$

et

$$\mathbb{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \textit{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

□

R. 2 On note que par construction $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\perp \rangle = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\perp \rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\parallel \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\parallel \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \\ &= 0 \quad \text{car } \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|_2^2 = 1.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) &= (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u} \underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_\perp}_{=0} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_\parallel \\ &= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\big(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}\big) = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u} \underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}_{=1} \\ &= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{x}_\parallel \\ &= \boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}_\parallel.\end{aligned}$$

Si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ alors $\boldsymbol{x}_\parallel = 0$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp$.

Exercice 9 [C]

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2 * \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \tag{9.1}$$

Q. 1 *Montrer que si* α *et* $\boldsymbol{u}$ *vérifient* (9.1) *alors*

a. on a

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{9.2}$$

b. on a

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b} \tag{9.3}$$

c. on en déduit que

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{2} \tag{9.4}$$

□

R. 1 Par la suite, on pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ pour alléger les notations.

a. On a

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle &= \langle \mathbb{H}^*\mathbb{H}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire} \\ &= \langle \mathbb{H}\boldsymbol{a}, \mathbb{H}\boldsymbol{a} \rangle \quad \text{par définition du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{H}\boldsymbol{a}\|_2^2 = \|\alpha\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2 \|\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2.\end{aligned}$$

b. Pour établir (9.3), on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} \\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{b} \\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

c. En effectuant le produit scalaire (à gauche) avec $\boldsymbol{a}$ de (9.3), on obtient

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - 2\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

ce qui prouve (9.4).

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2 *On suppose que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$

a. Montrer que $\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

□

R. 2 a. On a par définition de l'argument $\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg\alpha}$ et $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = |\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle| e^{\imath \arg(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)}$ ce qui donne

$$\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = |\alpha|\,|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle| e^{\imath(\arg\alpha + \arg(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle))} \tag{9.5}$$

et donc $\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ est réel si $\arg\alpha + \arg(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle) = 0\ [\pi]$.

b. On vient de demontrer que $\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$ et donc $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle > 0$.

- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle) + \pi\ [2\pi]$, alors de (9.5) on obtient $\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \leqslant 0$ et donc $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \geqslant \|\boldsymbol{a}\|_2 > 0$ car $\boldsymbol{a} \neq 0$.
- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\ [2\pi]$, alors de (9.5) on obtient $\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \geqslant 0$.
  Comme les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

  $$|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle| < \|\boldsymbol{a}\|_2 \|\boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2 .$$

  On obtient donc

  $$0 \leqslant \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \leqslant |\alpha|\,|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle| < |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2^2$$

  Attention, dans ce cas $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ peut-être très petit.

Q. 3 *Soient* α *et* $\boldsymbol{u}$ *vérifiant* (9.1). *En déduire que si* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{a}\rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}). \tag{9.6}$$

et $\|u\|_2 = 1$. □

R. 3 On peut noter que $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{a}\rangle \neq 0$ car sinon, d'après (9.3), $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ or par hypothèse $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont non colinéaires. On obtient alors immédiatement (9.6) à partir de (9.3)

Vérifions que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On a

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle = \frac{1}{4|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{a}\rangle|^2}\langle \boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\rangle$$

En utilisant (9.4), on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{a}\rangle|^2 &= 2(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle) \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\rangle &= \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle - \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + |\alpha|^2\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle = \|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + |\alpha|^2 \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \quad \text{car } \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \overline{(\alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)} = \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Exercice 10 [C]

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ avec $\delta \in [\![0,1]\!]$.*

a. On suppose que $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, (i.e. $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ colinéaires). Exprimer $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$ en fonction de λ et $\boldsymbol{b}$.

b. Que peut-on dire si $\boldsymbol{a}$ est nul?

□

R. 1 a. On a

$$\|\boldsymbol{a}\|_2 = |\lambda| \, \|\boldsymbol{b}\|_2 = |\lambda|$$

et

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle = \langle \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{b}\rangle = \lambda \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle = \lambda.$$

On rappelle que $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}$ et, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\arg(z) = -\arg(\overline{z})$. On a alors

$$\begin{aligned} \arg(\alpha) &= -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle) + \delta\pi \\ &= \arg(\lambda) + \delta\pi. \end{aligned}$$

On a alors

- avec $\delta = 0$,

$$\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)} = |\lambda| e^{\imath \arg(\lambda)} = \lambda$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

- avec $\delta = 1$,

$$\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)} = |\lambda| e^{\imath(\arg(\lambda)+\pi)} = -\lambda$$

$$\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = 2\lambda\boldsymbol{b}.$$

b. Si $\boldsymbol{a}$ est nul, on a $\alpha = 0$ et $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* Householder *de paramètres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\delta \in [\![0,1]\!]$ retournant une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que*

- *si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,*
- *sinon α est le nombre complexe défini en **Q. 1** (dépendant de δ) et $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder*

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$$

telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg(z) *(argument d'un nombre complexe),* eye(n) *(matrice identitée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées* □

Algorithme 2 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow$ Householder$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \delta)$.

Retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

R. 2

- si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon α est le nombre complexe défini par

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi,$$

et, $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$$

telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Données : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
δ : 0 ou 1, permet de déterminer α.

Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou indentité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe , de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi$.

```
Fonction [S, α] ← Householder( a, b, δ )
    ba ← dot(b, a)                                   ▷ dot(b, a) : b*a
    Si norm(a − ba ∗ b) < 1e − 15 alors
        S ← eye(n),  α ← 0
    Sinon
        α ← norm(a) ∗ exp(i ∗ (δ ∗ π + arg(ba)))
        u ← a − α ∗ b
        u ← u/norm(u)
        S ← eye(n) − 2 ∗ matprod(u, ctranspose(u))
    Fin Si
Fin Fonction
```

Q. 3 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* vecrand(n) *retournant un vecteur aléatoire de* $\mathbb{C}^n$*, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans* $]0, 1[$ *(loi uniforme).* ▫

R. 3

```
n ← 100
a ← vecrand(n)
b ← vecrand(n)
b ← b/norm(b, 2)
[H, α] ← Householder(a, b, 0)
error ← norm(H ∗ a − α ∗ b, 2)
```

Q. 4 *Proposer un programme permettant de vérifier que* $\delta = 1$ *est le "meilleur" choix.* ▫

R. 4 Ici, l'objectif est d'illustrer le fait qu'avec $\boldsymbol{a}$ *presque* colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on a (voir **Q. 1**)

- si $\delta = 1$, alors $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} \approx 2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b}$
- si $\delta = 0$, alors $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} \approx \boldsymbol{0}$ et ceci est source d'ennuis numériques (précision machine) lors du calcul du vecteur

$$\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}.$$

```
n ← 100
b ← vecrand(n)
```

3: $\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\text{norm}(\boldsymbol{b}, 2)$
4: $\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{b} + \text{tol} * \text{vecrand}(n)$
5: $[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 1)$
6: $[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
7: $\text{error0} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_0 * \boldsymbol{a} - \alpha_0 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_0))$
8: $\text{error1} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_1 * \boldsymbol{a} - \alpha_1 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_1))$

Dans la figure qui suit, on représente en échelle logarithmique, et, en fonction de l'ordre des matrices, l'erreur obtenue avec $\delta = 1$, $\delta = 0$ et $\text{tol} = 1e-12$ lors de l'utilisation de la fonction Householder avec un vecteur $\boldsymbol{a}$ *presque* colinéaire à $\boldsymbol{b}$. En Figure 2, la représentation est faite avec $\text{tol} = 1e-6$.

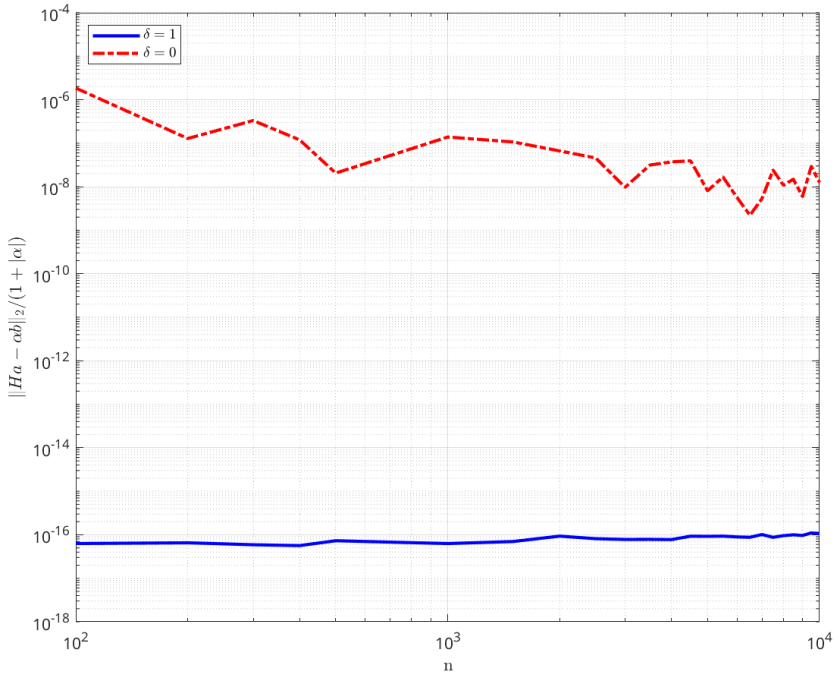


Figure 1: Choix de α dans Householder : erreur relative en norme L_2 avec $\text{tol} = 1e-12$

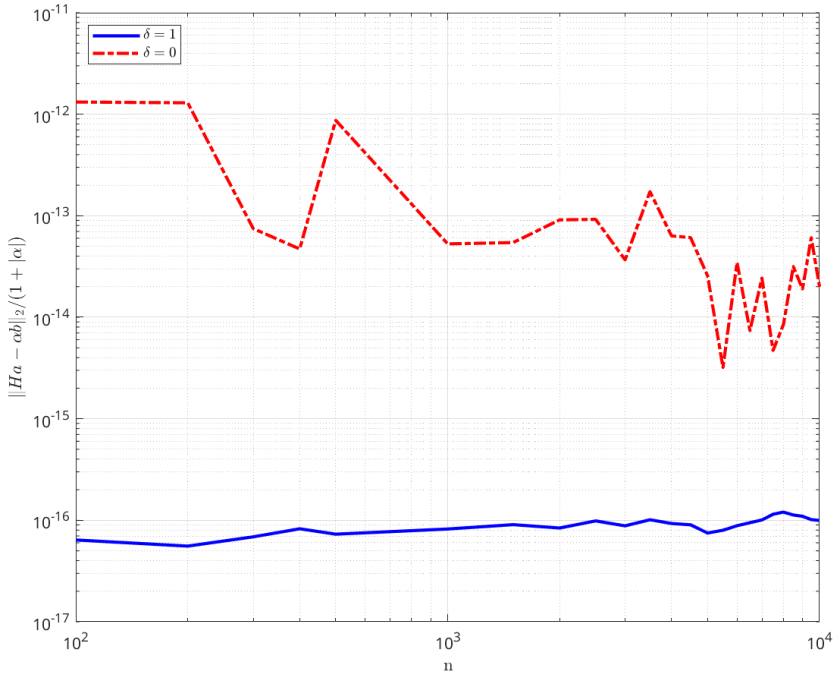


Figure 2: Choix de α dans Householder : erreur relative en norme L_2 avec $\text{tol} = 1e-6$

Exercice 11 [C]

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1. \tag{11.1}$$

Correction Avec $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$, on est sous les conditions du théorème 3.1.8 de [1]. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi, \quad \text{avec } \delta \in [\![0,1]\!].$$

On a donc

$$\arg\alpha = -\arg(\overline{a_1}) + \delta\pi = \arg(a_1) + \delta\pi.$$

le choix $\delta = 1$ étant numériquement préférable (voir Exercice ...) Le théorème permet alors d'affirmer que

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

Or , on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a} - |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)}\boldsymbol{e}_1 \\ &= \boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath(\arg(a_1)+\delta\pi)}\boldsymbol{e}_1 \end{aligned}$$

Avec le choix $\delta = 1$, on obtient

$$\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1.$$

On obtient alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1\|_2}\right)\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(a_1)}\boldsymbol{e}_1$$

◇

Exercice 12 [C]

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{12.1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ *est vraie.* ▫

R. 1 • **Initialisation** : on va montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie
Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1}$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = (1,0)^{\mathsf{t}}$.

- Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème 3.1.8 de [1]. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

  On pose $\mathbb{U} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.
- Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\boldsymbol{a}_2 = \mathbb{A}_{2,1} = 0$ et on pose $\mathbb{U} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \boldsymbol{a}_1 (= \mathbb{A}_{1,1})$.

Dans les 2 cas, on obtient

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{U}\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\boldsymbol{b} & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ 0 & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure et la matrice $\mathbb{U}$ est soit l'indentité, soit une matrice élémentaire de Housholder.

- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée, on va alors montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
  Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = \boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique $(\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{b}_i = \delta_{1,i})$.

  - Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème 3.1.8 de [1]. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a
  $$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$
  On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.
  - Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $\boldsymbol{a}_i = \mathbb{A}_{i,1} = 0$. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \boldsymbol{a}_1 (= \mathbb{A}_{1,1})$.

  Dans les 2 cas, on obtient
  $$\begin{aligned}\mathbb{H}\mathbb{A} &= \mathbb{H}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{A}_{:,2} & \dots & \mathbb{A}_{:,n}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} & \dots & \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n}\end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \alpha\boldsymbol{e}_1 & \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} & \dots & \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n}\end{array}\right)\end{aligned}$$
  On en déduit que $\mathbb{H}\mathbb{A}$ s'écrit aussi sous la forme
  $$\mathbb{H}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$
  où $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On peut donc appliquer à $\mathbb{A}_{n-1}$ l'hypothèse de récurrence: $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\exists \mathbb{R}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que
  $$\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}.$$
  On défini alors
  $$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$
  On a
  $$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}^*_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}^*_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$
  Comme $\mathbb{U}_{n-1}$ est unitaire, on en déduit que $\mathbb{U}$ est aussi unitaire. On a alors
  $$\begin{aligned}\mathbb{U}(\mathbb{H}\mathbb{A}) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{R}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).\end{aligned}$$
  Comme $\mathbb{R}_{n-1}$ est triangulaire supérieure, on en déduit que $\mathbb{R}_n$ est aussi triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}\mathbb{H}$. Cette matrice est unitaire, car produit de deux matrices unitaires, et on a
  $$\mathbb{U}_n\mathbb{A} = \mathbb{R}_n.$$
  La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée.

- **Conclusion** : on vient de démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Q. 2 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer qu'il existe une matrice unitaire* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

□

R. 2 D'après la proposition $(\mathcal{P}_n)$, Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^{-1}$ et donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^*$, qui est unitaire, on obtient le résultat demandé.

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{12.2}$$

Q. 3 *La proposition* $(\mathcal{Q}_n)$ *est-elle vérifiée pour tout* $n \geqslant 2$? *Justifier.* □

R. 3 La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est toujours vérifiée. En effet, en reprenant la démonstration par récurrence dans le cas complexe, on peut noter que toutes les matrices sont réelles y compris les matrices de Householder utilisées car les coefficients α sont nécessairement réels ($\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi = \delta\pi$), et Les matrices unitaires réelles sont orthogonales.

Q. 4 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

b. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

c. *On suppose* $\mathbb{A}$ *inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une unique matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficient diagonaux strictement positifs telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

□

R. 4 a. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est orthogonale, on a $\mathbb{U}^{\mathsf{t}} = \mathbb{U}^{-1}$ et donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}\mathbb{R}.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}$, qui est orthogonale, on obtient le résultat demandé.

b. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\widetilde{\mathbb{U}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\widetilde{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \widetilde{\mathbb{R}}.$$

Soit S l'application telle que $S(x) = -1$, si $x < 0$ et $S(x) = +1$, si $x \geqslant 0$. Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice diagonale telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{D}_{i,i} = S(\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i})$. Cette matrice est orthogonale.

On a alors

$$\mathbb{D}\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{R}}.$$

On pose $\mathbb{U} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{U}}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{R}}$. Comme le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, la matrice $\mathbb{U}$ est orthogonale. La matrice $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure car le produit d'une matrice diagonale par une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{R}_{i,i} = \mathbb{D}_{i,i}\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i} = S(\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i})\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i} = |\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i}| \geqslant 0.$$

En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}$, on obtient le résultat souhaité.

c. On vient de démontrer, en **Q. 4** b., qu'il l existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{A}$ inversible, on a

$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{Q})\det(\mathbb{R}) \neq 0.$$

On en déduit que $\det(\mathbb{R}) \neq 0$. De plus, $\mathbb{R}$ étant triangulaire supérieure, on obtient

$$\det(\mathbb{R}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{i,i} \neq 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{R}_{i,i} \neq 0.$$

et donc, tous les coefficient diagonaux de $\mathbb{R}$ sont strictement positifs.

Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux strictements positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2.$$

On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\big(\mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2\big)^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}\mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme $\mathbb{Q}_1$ est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2$ et

$$\mathbb{T}^{\mathsf{t}}\mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2)^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ est donc orthogonal. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice $\mathbb{I}$ étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15(factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L}\mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$. Cette matrice $\mathbb{L}$ est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.

Exercice 13 [C]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 *Expliciter, en fonction de* $\boldsymbol{v}$, *le vecteur* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, *tel que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{e}_1^n, \quad \textit{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

□

R. 1 On a

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\delta\pi - \arg\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n\rangle)}, \ \delta \in \{0,1\}.$$

Comme $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n \rangle = \overline{v_1}$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, on obtient

$$\alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\arg(v_1) + \delta\pi)}$$

ce qui donne avec le choix $\delta = 1$

$$\alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(v_1)}.$$

Q. 2 *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ et de $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.* □

R. 2 On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) &= \mathbb{I}_{m+n} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2 \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{H}(\boldsymbol{x}) & -2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline -2\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \mathbb{H}(\boldsymbol{y}) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Q. 3 *On pose $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.*

a. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

b. Que peut-on dire de particulier sur le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?

□

R. 3 a. De la question précédente, on déduit

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

b. le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ correspond à la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne vaut $\alpha \boldsymbol{e}_1^n$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \hline 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \end{array}\right).$$

Exercice 14 [C]

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Expliquer comment construire une matrice* $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *unitaire, produit d'au plus* $n-1$ *matrices élémentaires de Householder, et,* $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *triangulaire supérieure telles* $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$. ▫

R. 1

Remarque 1. *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $j \in \mathcal{M}_1(n)$. *On dit que la colonne* j *de* $\mathbb{A}$ *est colonne supérieure si,* $\forall i \in [\![j+1, n]\!]$, $A_{i,j} = 0$, *c'est à dire*

$$\mathbb{A}_{:,j} = \text{Vect}\left(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j\right).$$

En notant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$, l'idée générale est la suivante:
Pour j allant successivement de 1 à $n-1$, on va déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure sans modifier les colonnes 1 à j de $\mathbb{A}^{[j-1]}$.

Etape 1: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}^{[0]}$ soit colonne supérieure .

- Si $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$ alors on prend $\mathbb{H}^{[1]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$: on est sous les hypothèse du corollaire 3.1.3 de [1] avec $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ donné par

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1\right\|_2}$$

on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)$ et $\alpha_1 = -\|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[1]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}_1\mathbb{A}^{[0]} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \hline 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \end{array}\right).$$

Etape 2: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[2]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 2 de $\mathbb{A}^{[2]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]}$ soit colonne supérieure sans modifier la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]}$. Pour celà on va utiliser le corollaire 3.1.3 de [1] en posant

$$\mathbb{A}^{[1]} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{U} = \alpha_1, \ \mathbb{E} = \mathbb{O}_{n-1,1}, \ \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[1]}_{1,2:n}, \ \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[1]}_{2:n,2:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^{n-1}$, alors on pose $\mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, et le corollaire peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ donné par

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1^{n-1}}{\left\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1^{n-1}\right\|} \text{ avec } \alpha_2 = -\left\|\mathbb{V}_{1,:}\right\|_2 e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1^{n-1}$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \hline 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & \bullet \cdots \cdots \bullet \end{array}\right).$$

De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \\ \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_2) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2) \\ 0 & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

on a

$$\mathbb{A}^{[2]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]} \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbb{F} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \\ 0 & \end{array}\right)$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[2]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions 2 et $n-2$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[2]} = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & \bullet & \bullet \cdots\cdots \bullet \\ 0 & \alpha_2 & \bullet \cdots\cdots \bullet \\ \hline 0 & 0 & \bullet \cdots\cdots \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & 0 & \bullet \cdots\cdots \bullet \end{array}\right) \begin{array}{l} \uparrow \\ 2 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ n-2 \\ \downarrow \end{array}$$

(2 au-dessus de $n-2$)

...

Etape j: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure tout en ayant les $(j-1)$ premières colonnes identiques à celles $\mathbb{A}^{[j-1]}$.
Pour celà on utilise le corollaire 3.1.3 de [1] en posant, $p = j-1$, $q = n-p$ et

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{U} = \left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \bullet \cdots\cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \bullet \\ 0 \cdots\cdots & 0 & \alpha_{j-1} \end{array}\right), \ \mathbb{E} = \mathbb{O}_{q,p}, \ \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{1:p,j:n}, \ \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$, alors on prend $\mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, et le Lemme peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{C}^q$ donné par

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q}{\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q\|} \text{ avec } \alpha_j = -\|\mathbb{V}_{1,:}\|_2 \, e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_j & \bullet \cdots\cdots \bullet \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bullet \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & \bullet \cdots\cdots \bullet \end{array}\right).$$

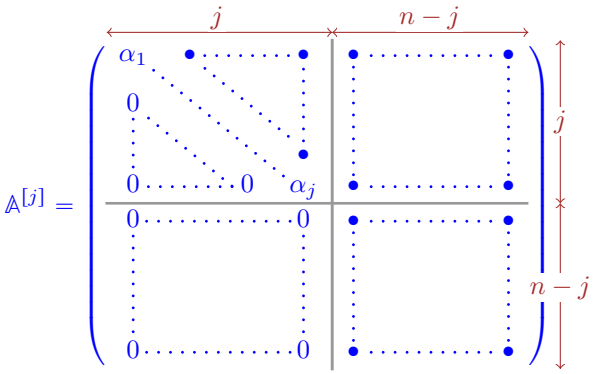
De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_j = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \\ \boldsymbol{u}_j \\ \\ \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_j) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j) \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

on a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline & \\ \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \\ & \end{array}\right).$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[j]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions j et $n-j$, on obtient



Etape $n-1$: faire l'Etape j avec $j = n-1$.

Au final, on a donc

$$\mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]} \mathbb{A} = \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure, et, les matrices $\mathbb{H}^{[j]}$, $j \in [\![1, n-1]\!]$ sont, soit la matrice identité, soit une matrice élémentaire de Householder: elles sont donc unitaires.
On note $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]}$, cette matrice est donc le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder. Comme le produit de matrices unitaires reste une matrice unitaire, on a $\mathbb{H}$ unitaire et

$$\mathbb{A} = \mathbb{H}^* \mathbb{R}.$$

On pose $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$. La matrice $\mathbb{Q}$ est alors unitaire et on a

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{H}^{[1]}\right)^* \dots \left(\mathbb{H}^{[n-1]}\right)^*.$$

Les matrices élémentaires de Householer étant hermitiennes, on obtient

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \dots \mathbb{H}^{[n-1]}$$

et donc $\mathbb{Q}$ est aussi le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder.

Q. 2 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation $\mathbb{QR}$ d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
On pourra utiliser la fonction Householder *Exercice 10 Exercice 3.1.9 .* □

R. 2

Algorithme 3 $\mathcal{R}_0$

1: Calculer $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Algorithme 3 $\mathcal{R}_1$

1: Calculer $\mathbb{H}^{[1]}$ à $\mathbb{H}^{[n-1]}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \dots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \dots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\mathcal{R}_1$

1: Calculer $\mathbb{H}^{[1]}$ à $\mathbb{H}^{[n-1]}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \dots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \dots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\mathcal{R}_2$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: Calculer $\mathbb{H}^{[j]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]}$
5: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
6: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
7: **Fin Pour**
8: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Etape j: On suppose les $j-1$ premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j-1]}$ sous forme triangulaire supérieure.
On pose $p = j-1$, $q = n-p$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en 2×2 blocs:

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array}$$

avec, par hypothèse, $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure et $\mathbb{E}$ matrice nulle.

Pour calculer $\mathbb{H}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on défini le vecteur $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$ comme étant le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$. On note $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{C}^q$, le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$.

- Si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$, i.e. $\boldsymbol{v}$ est nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, alors $\mathbb{H}^{[j-1]} = \mathbb{I}_n$. On a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]} = \mathbb{A}^{[j-1]}$$

  et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

- Sinon, en utilisant le corollaire 3.1.3 de [1], on défini le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$

  et, la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ vérifie alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{v} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1.$$

  En posant

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

  où la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ est donnée par

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_n - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \end{array} \right).$$

  On a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \mathbb{V} \end{array} \right)$$

  et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

Pour déterminer la matrice $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de connaitre $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$. On va donc utiliser une fonction réalisant cette opération dans l'algorithme de factorisation $\mathbb{QR}$

Algorithme 3 $\mathcal{R}_2$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: Calculer $\mathbb{H}^{[j]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]}$
5: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
6: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
7: **Fin Pour**
8: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\mathcal{R}_3$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j}$
5: $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder4QRstep$(\boldsymbol{v}, n)$
6: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
7: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
8: **Fin Pour**
9: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

La fonction MatHouseholder4QRstep étant donnée par:

Algorithme 4 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder4QRstep$(\boldsymbol{v}, n)$.

A partir d'un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$, retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$ (i.e. $\boldsymbol{v}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon, en définissant $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$

  on prend $\mathbb{S}$ comme étant la matrice élémentaire de Householder:

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \quad \text{avec } \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Données : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$,
n : dimension de
Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe.

```
Fonction [S, α] ← MatHouseholder4QRstep( v, n )
  e ← 0_q, e(1) ← 1
  [H, α] ← Householder(v, e, 1)
  S ← eye(n)
  Si α ≠ 0 alors
    p ← n − q
    I ← p + 1 : n
    S(I, I) ← H
  Fin Si
Fin Fonction
```

Bien évidemment, on peut simplifier/améliorer l'écriture de l'Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_3}$ en ne stockant pas les suites de matrices:

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

```
Q ← I
A^[0] ← A
Pour j ← 1 à n − 1 faire
  v ← A^[j−1]_{j:n,j}
  [H^[j], α] ← MatHouseholder4QRstep(v, n)
  A^[j] ← H^[j] ∗ A^[j−1]
  Q ← Q ∗ H^[j]
Fin Pour
R ← A^[n−1]
```

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

```
Q ← I
R ← A
Pour j ← 1 à n − 1 faire
  v ← R_{j:n,j}
  [H, α] ← MatHouseholder4QRstep(v, n)
  Si α ≠ 0 alors                    ▷ Sinon H = I!
    R ← H ∗ R
    Q ← Q ∗ H
  Fin Si
Fin Pour
```

Voici (enfin) l'agorithme final:

Algorithme 3 Fonction FactQR

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

```
Fonction [Q, R] ← FactQR( A )
  Q ← I
  R ← A
  Pour j ← 1 à n − 1 faire
    v ← R(j : n, j)
    [H, α] ← MatHouseholder4QRstep(v, n)
    Si α ≠ 0 alors                  ▷ Sinon H = I!
      R ← H ∗ R
      Q ← Q ∗ H
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Fonction
```

Q. 3 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:*

- MatRand(m,n) *retournant une matrice aléatoire de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme* $[0,1]$.
- NormInf$(\mathbb{A})$ *retournant la norme infinie d'une matrice carrée* $\mathbb{A}$.

▫

R. 3
1: $\mathbb{A} \leftarrow$ MatRand$(50,50)$
2: $[\mathbb{Q},\mathbb{R}] \leftarrow$ FactQR$(\mathbb{A})$
3: err $\leftarrow$ NormInf$(\mathbb{A}-\mathbb{Q}*\mathbb{R})$ ▷ doit être très petit!

---

2 Exercices supplémentaires

Exercice 15 : Factorisation $\mathbb{LU}$ [C]

Q. 1 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *admettant une factorisation* $\mathbb{LU}$. *Montrer que cette factorisation est unique (sans citer le théorème du cours!)* ▫

R. 1 a. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la première ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{1,j} = \sum_{k=1}^{4} L_{1,k}U_{k,j} = U_{1,j}.$$

Donc on a $U_{1,j} = A_{1,j}$, $\forall j \in [\![1,4]\!]$ et $\mathbb{U}_{1,:} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la première colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,1} = \sum_{k=1}^{4} L_{j,1}U_{k,1} = L_{j,1}U_{1,1}.$$

Donc on a $L_{j,1} = A_{j,1}/U_{1,1}$, $\forall j \in [\![2,4]\!]$ et $\mathbb{L}_{:,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & L_{3,2} & 1 & 0 \\ 4 & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la deuxième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{2,j} = \sum_{k=1}^{4} L_{2,k}U_{k,j} = L_{2,1}U_{1,j} + L_{2,2}U_{2,j} = L_{2,1}U_{1,j} + U_{2,j}.$$

Donc on a $U_{2,j} = A_{1,j} - L_{2,1}U_{1,j}$, $\forall j \in [\![2,4]\!]$ et $\mathbb{U}_{2,:} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la deuxième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,2} = \sum_{k=1}^{4} L_{j,1}U_{k,2} = L_{j,1}U_{1,2} + L_{j,2}U_{2,2}.$$

Donc on a $L_{j,2} = \big(A_{j,2} - L_{j,1}U_{1,2}\big)/U_{2,2}$, $\forall j \in [\![3,4]\!]$ et $\mathbb{L}_{:,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la troisième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{3,j} = \sum_{k=1}^{4} L_{3,k}U_{k,j} = \sum_{k=1}^{2} L_{3,k}U_{k,j} + L_{3,3}U_{3,j} = \sum_{k=1}^{2} L_{3,k}U_{k,j} + U_{3,j}.$$

Donc on a $U_{3,j} = A_{3,j} - \sum_{k=1}^{2} L_{3,k}U_{k,j}$, $\forall j \in [\![2,4]\!]$ et $\mathbb{U}_{2,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la troisième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,3} = \sum_{k=1}^{4} L_{j,1}U_{k,3} = L_{j,1}U_{1,3} + L_{j,2}U_{2,3} + L_{j,3}U_{3,3}.$$

Donc on a $L_{j,3} = \big(A_{j,3} - L_{j,1}U_{1,3} - L_{j,2}U_{2,3}\big)/U_{3,3}$, $\forall j \in [\![4,4]\!]$ et $\mathbb{L}_{:,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- Enfin, on calcule la quatrième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{4,4} = \sum_{k=1}^{4} L_{4,k}U_{k,4} = \sum_{k=1}^{3} L_{4,k}U_{k,4} + L_{4,4}U_{4,4} = \sum_{k=1}^{3} L_{4,k}U_{k,4} + U_{4,4}.$$

Donc on a $U_{4,4} = A_{4,4} - \sum_{k=1}^{3} L_{4,k}U_{k,4}$, et $\mathbb{U}_{3,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Au final, on a

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *On peut bien sûr vérifier que*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

b. Pour démontrer l'unicité, on va supposer qu'il existe deux factorisations $\mathbb{L}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$ i.e.

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2.$$

avec $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ matrices triangulaires inférieures à diagonale unité et $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ matrices triangulaires supérieures (inversibles). En multipliant l'équation $\mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2$ à gauche par $\mathbb{L}_1^{-1}$ et à droite par $\mathbb{U}_2^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1} = \mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2. \tag{15.1}$$

La matrice $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonale unité. Elle est égale à la matrice $\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1}$ qui elle est triangulaire supérieure (car prduit de deux matrices triangulaires supérieures). Donc $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ est à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure : elle est donc diagonale. Comme elle est à diagonale unité on en déduit que $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. De l'équation (15.2), on tire alors $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$.

c. On a

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{L}\mathbb{U}) = \det(\mathbb{L})\det(\mathbb{U}) \\ &= 1 \times 16 = 16.\end{aligned}$$

d. Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et équivalent à résoudre $\mathbb{L}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. on note $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}\boldsymbol{x}$ qui est solution du système triangulaire inférieur

$$\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la descente pour obtenir

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on peut déterminer $\boldsymbol{x}$ comme solution du système triangulaire supèrieur

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la remontée pour obtenir

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *On peut bien sûr vérifier que*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\mathbb{A} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

Q. 2 *a. Déterminer $\mathbb{L}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ une matrice triangulaire supérieure telles que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$.*

b. Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$.

c. Résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

□

R. 2 a. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la première ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{1,j} = \sum_{k=1}^{4} L_{1,k}U_{k,j} = U_{1,j}.$$

Donc on a $U_{1,j} = A_{1,j}$, $\forall j \in [\![1,4]\!]$ et $\mathbb{U}_{1,:} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la première colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,1} = \sum_{k=1}^{4} L_{j,1}U_{k,1} = L_{j,1}U_{1,1}.$$

Donc on a $L_{j,1} = A_{j,1}/U_{1,1}$, $\forall j \in [\![2,4]\!]$ et $\mathbb{L}_{:,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & L_{3,2} & 1 & 0 \\ 4 & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la deuxième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{2,j} = \sum_{k=1}^{4} L_{2,k}U_{k,j} = L_{2,1}U_{1,j} + L_{2,2}U_{2,j} = L_{2,1}U_{1,j} + U_{2,j}.$$

Donc on a $U_{2,j} = A_{1,j} - L_{2,1}U_{1,j}$, $\forall j \in [\![2,4]\!]$ et $\mathbb{U}_{2,:} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la deuxième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,2} = \sum_{k=1}^{4} L_{j,1}U_{k,2} = L_{j,1}U_{1,2} + L_{j,2}U_{2,2}.$$

Donc on a $L_{j,2} = \big(A_{j,2} - L_{j,1}U_{1,2}\big)/U_{2,2}$, $\forall j \in [\![3,4]\!]$ et $\mathbb{L}_{:,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & L_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & U_{3,3} & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- On calcule la troisième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{3,j} = \sum_{k=1}^{4} L_{3,k}U_{k,j} = \sum_{k=1}^{2} L_{3,k}U_{k,j} + L_{3,3}U_{3,j} = \sum_{k=1}^{2} L_{3,k}U_{k,j} + U_{3,j}.$$

Donc on a $U_{3,j} = A_{3,j} - \sum_{k=1}^{2} L_{3,k}U_{k,j}$, $\forall j \in [\![2,4]\!]$ et $\mathbb{U}_{2,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- On calcule ensuite la troisième colonne de $\mathbb{L}$ car on a

$$A_{j,3} = \sum_{k=1}^{4} L_{j,1}U_{k,3} = L_{j,1}U_{1,3} + L_{j,2}U_{2,3} + L_{j,3}U_{3,3}.$$

Donc on a $L_{j,3} = \big(A_{j,3} - L_{j,1}U_{1,3} - L_{j,2}U_{2,3}\big)/U_{3,3}$, $\forall j \in [\![4,4]\!]$ et $\mathbb{L}_{:,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a maintenant

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & U_{4,4} \end{pmatrix}$$

- Enfin, on calcule la quatrième ligne de $\mathbb{U}$ car on a

$$A_{4,4} = \sum_{k=1}^{4} L_{4,k}U_{k,4} = \sum_{k=1}^{3} L_{4,k}U_{k,4} + L_{4,4}U_{4,4} = \sum_{k=1}^{3} L_{4,k}U_{k,4} + U_{4,4}.$$

Donc on a $U_{4,4} = A_{4,4} - \sum_{k=1}^{3} L_{4,k}U_{k,4}$, et $\mathbb{U}_{3,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Au final, on a

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *On peut bien sûr vérifier que*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

b. Pour démontrer l'unicité, on va supposer qu'il existe deux factorisations $\mathbb{L}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$ i.e.

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2.$$

avec $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ matrices triangulaires inférieures à diagonale unité et $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ matrices triangulaires supérieures (inversibles). En multipliant l'équation $\mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2$ à gauche par $\mathbb{L}_1^{-1}$ et à droite par $\mathbb{U}_2^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1} = \mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2. \tag{15.2}$$

La matrice $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité car produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonale unité. Elle est égale à la matrice $\mathbb{U}_1\mathbb{U}_2^{-1}$ qui elle est triangulaire supérieure (car prduit de deux matrices triangulaires supérieures). Donc $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2$ est à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure : elle est donc diagonale. Comme elle est à diagonale unité on en déduit que $\mathbb{L}_1^{-1}\mathbb{L}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. De l'équation (15.2), on tire alors $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$.

c. On a

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{L}\mathbb{U}) = \det(\mathbb{L})\det(\mathbb{U}) \\ &= 1 \times 16 = 16. \end{aligned}$$

d. Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et équivalent à résoudre $\mathbb{L}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. on note $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}\boldsymbol{x}$ qui est solution du système triangulaire inférieur

$$\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la descente pour obtenir

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on peut déterminer $\boldsymbol{x}$ comme solution du système triangulaire supèrieur

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

que l'on peut résoudre simplement par la méthode de la remontée pour obtenir

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *On peut bien sûr vérifier que*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -26 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

Q. 3 *On peut noter que la matrice* $\mathbb{A}$ *est symétrique*

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\mathbb{D}$ *telle que* $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t$, *la matrice* $\mathbb{L}$ *étant celle de la question précédente.*

b. Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. En déduire que la matrice $\mathbb{A}$ *est définie positive.*

□

R. 3 a. On pose

$$\mathbb{D} = \mathrm{diag}(\mathbb{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\mathbb{D}\mathbb{L}^t = \mathbb{U}$. En effet

$$\mathbb{D}\mathbb{L}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \mathbb{U}.$$

b. Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si

symétrique : $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,
définie positive : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$.

c. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^t\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^t\boldsymbol{x} \rangle$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{L}^t\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^t$ inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{4} D_{i,i}|y_i|^2 > 0$$

car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, 4]\!]$ et $\boldsymbol{y} \neq 0$.
La matrice symétrique $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

Q. 4 *En déduire qu'il existe une matrice* $\mathbb{B}$ *triangulaire inférieure à diagonale positive telle qur* $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^t$. □

R. 4 Soit $\mathbb{S}$ la matrice diagonale telle que $\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}$ donnée par

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbb{S}$ est symétrique, on a

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^t = \mathbb{L}\mathbb{S}\mathbb{S}^t\mathbb{L}^t.$$

On pose $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{S}$, c'est à dire

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *On peut bien sûr vérifier que*

$$\mathbb{A} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{B}^t \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 [C]

Definition. *On dit que* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *admet une* ***factorisation*** $\mathbb{W}\mathbb{U}$ *si il existe* $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ***triangulaire inférieure inversible*** *et* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ***triangulaire supérieure à diagonale unité*** *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}.$$

On note $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\mathbb{W} = (w_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{U} = (u_{i,j})_{i,j=1}^n$ les composantes de ces matrices.
On rappelle que la sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, $k \in [\![1, n]\!]$, est la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = a_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!].$$

Q. 1 *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *admettant une factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

a. Démontrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ *sont inversibles.*

b. Démontrer que la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ *est unique.*

c. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ *donné. Expliquer comment résoudre le système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *à l'aide de la factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$.

□

R. 1 a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On appelle sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!].$$

b. Comme la matrice $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure inversible, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $w_{i,i} \neq 0$. Comme la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure à diagonale unité, elle est inversible et on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u_{i,i} = 1$.

La sous-matrice principale d'ordre n de $\mathbb{A}$, est $\mathbb{A}$ qui est inversible par hypothèse.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Montrons que la sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, est inversible.
On écrit les trois matrices $\mathbb{A}$, $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$ sous la forme de matrices blocs carrés 2×2 dont le premier bloc diagonal est dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et le second dans $\mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure et $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure, on a

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right), \quad \mathbb{W} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{W}_{1,1} & \mathbb{O}_{k,n-k} \\ \hline \mathbb{W}_{2,1} & \mathbb{W}_{2,2} \end{array}\right) \text{ et } \mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{1,1} & \mathbb{U}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n-k,k} & \mathbb{U}_{2,2} \end{array}\right).$$

On a alors $\mathbb{W}_{1,1} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec tous ses éléments diagonaux non nuls puisque $(\mathbb{W}_{1,1})_{i,i} = w_{i,i} \neq$. $\mathbb{W}_{1,1}$ est donc inversible. De plus, $\mathbb{U}_{1,1} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux égaux à 1 et donc $\mathbb{U}_{1,1}$ est inversible. On a

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{W}_{1,1} & \mathbb{O}_{k,n-k} \\ \hline \mathbb{W}_{2,1} & \mathbb{W}_{2,2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{1,1} & \mathbb{U}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n-k,k} & \mathbb{U}_{2,2} \end{array}\right).$$

En effectuant le produit matricielle bloc, 1ère ligne bloc par 1ère colonne bloc, on obtient

$$\mathbb{A}_{1,1} = \mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1} + \mathbb{O}_{k,n-k}\mathbb{O}_{n-k,k} = \mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1}.$$

On a donc, par propriété du déterminant,

$$\det\left(\mathbb{A}_{1,1}\right) = \det\left(\mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1}\right) = \det\left(\mathbb{W}_{1,1}\right)\det\left(\mathbb{U}_{1,1}\right).$$

Comme $\mathbb{W}_{1,1}$ et $\mathbb{U}_{1,1}$ sont inversibles, leurs déterminants sont non nuls. On en déduit que $\det\left(\mathbb{A}_{1,1}\right) \neq 0$, c'est à dire $\mathbb{A}_{1,1}$ inversible, or par définition, $\mathbb{A}_{1,1} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ est la sous matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$.

c. Soient $\mathbb{W}_1\mathbb{U}_1$ et $\mathbb{W}_2\mathbb{U}_2$ deux factorisations $\mathbb{W}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$. avec $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$ triangulaires inférieures inversibles et $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ triangulaires supérieures à diagonale unité (donc inversibles). Les matrices ${\mathbb{W}_1}^{-1}$ et ${\mathbb{W}_2}^{-1}$ sont donc triangulaires inférieures et les matrices ${\mathbb{U}_1}^{-1}$ et ${\mathbb{U}_2}^{-1}$ sont donc triangulaires supérieures à diagonale unité puisque pour $k \in \{1,2\}$, on

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \left({\mathbb{U}_k}^{-1}\right)_{i,i} = \frac{1}{\left(\mathbb{U}_k\right)_{i,i}} = 1.$$

On a

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{W}_2\mathbb{U}_2$$

et en multipliant à droite par ${\mathbb{U}_2}^{-1}$ et à gauche par ${\mathbb{W}_1}^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1} = {\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2. \tag{16.1}$$

La matrice ${\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2$ est triangulaire inférieure car produit de deux matrices triangulaires inférieures. La matrice $\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1}$ est triangulaire supérieure car produit de deux matrices triangulaires supérieures. Comme ces deux matrices sont égales, on en déduit On déduit de (16.1), que les matrices ${\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2$ et $\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1}$ sont diagonales. Or on a

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left(\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1}\right)_{i,i} = \left(\mathbb{U}_1\right)_{i,i}\left({\mathbb{U}_2}^{-1}\right)_{i,i} = 1$$

ce qui donne

$$\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1} = \mathbb{I} = {\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2$$

et donc $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$ et $\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_2$.

d. Comme $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$, résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ revient alors à résoudre

$$\mathbb{W}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}\boldsymbol{x}$, et on résoud tout à bord

$$\mathbb{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}.$$

puis, une fois le vecteur $\boldsymbol{y}$ déterminé, on résoud

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$. Expliquer de manière détaillée une méthodologie pour calculer les coefficients des matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$. On explicitera les formules utilisées.* ▫

R. 2

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U} \tag{16.2}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ w_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ w_{n,1} & \dots & w_{n,n-1} & w_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \dots & u_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16.3}$$

Etape 1: • La 1ère colonne de $\mathbb{U}$ est connue, on peut alors calculer la 1ère colonne de $\mathbb{W}$.
• La 1ère ligne de $\mathbb{W}$ est connue, puisque l'on vient de calculer (entre autres) $w_{1,1}$. On peut déterminer la 1ère ligne de $\mathbb{U}$.

Etape 2: • La 2ème colonne de $\mathbb{U}$ est connue, on peut alors, connaissant la 1ère colonne de $\mathbb{W}$, calculer la 2ème colonne de $\mathbb{W}$.
• La 2ème ligne de $\mathbb{W}$ est maintenant connue. On peut déterminer, la 2ème ligne de $\mathbb{U}$ puisque l'on connait sa 1ère ligne.

$\vdots$

Etape i: on suppose connue les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{W}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

- La $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{U}$ est connue puisque $u_{i,i}=1$. On peut calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{W}$. En effet, soit $j\in[\![i,n]\!]$, on a

$$a_{j,i}=\sum_{k=1}^{n}w_{j,k}u_{k,i}=\sum_{k=1}^{i-1}w_{j,k}u_{k,i}+w_{j,i}u_{i,i}+\sum_{k=i+1}^{n}w_{j,k}u_{k,i}.$$

  Or, $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure, donc $u_{k,i}=0$, $\forall k>i$. De plus $u_{i,i}=1$, on obtient donc

$$a_{j,i}=\sum_{k=1}^{i-1}w_{j,k}u_{k,i}+w_{j,i}.$$

  Dans la somme, par hypothèse, $w_{j,k}$ et $u_{k,i}$ sont connus car $k\in[\![1,i-1]\!]$. On obtient alors

$$\forall j\in[\![i,n]\!],\ w_{j,i}=a_{j,i}-\sum_{k=1}^{i-1}w_{j,k}u_{k,i}. \tag{16.4}$$

- La $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{W}$ est maintenant connue puisque l'on vient de calculer (entre autres) $w_{i,i}$. On peut alors calculer la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{U}$. En effet, soit $j\in[\![i+1,n]\!]$, on a

$$a_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}w_{i,k}u_{k,j}=\sum_{k=1}^{i-1}w_{i,k}u_{k,j}+w_{i,i}u_{i,j}+\sum_{k=i+1}^{n}w_{i,k}u_{k,j}.$$

  Or, $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure, donc $w_{i,k}=0$, $\forall k>i$. On obtient donc

$$a_{i,j}=\sum_{k=1}^{i-1}w_{i,k}u_{k,j}+w_{i,i}u_{i,j}.$$

  Dans la somme, par hypothèse, $w_{i,k}$ et $u_{k,j}$ sont connus car $k\in[\![1,i-1]\!]$. On obtient alors

$$\forall j\in[\![i+1,n]\!],\ u_{i,j}=\frac{1}{w_{i,i}}\left(a_{i,j}-\sum_{k=1}^{i-1}w_{i,k}u_{k,j}\right). \tag{16.5}$$

  et $w_{i,i}\neq 0$ car sinon la factorisation wu de $\mathbb{A}$ ne serait pas possible.

Pour résumer, on va calculer sussessivement, pour i allant de 1 à n

- la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{W}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} w_{j,i} & = & 0, & \forall j\in[\![1,i-1]\!],\\ w_{j,i} & = & a_{j,i}-\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}w_{j,k}u_{k,i}, & \forall j\in[\![i,n]\!],\end{array}\right. \tag{16.6}$$

- la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{U}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_{i,j} & = & 0, & \forall j\in[\![1,i-1]\!],\\ u_{i,i} & = & 1, & \\ u_{i,j} & = & \frac{1}{w_{i,i}}\left(a_{i,j}-\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}w_{i,k}u_{k,j}\right), & \forall j\in[\![i+1,n]\!],\end{array}\right. \tag{16.7}$$

Q. 3 ***[Algo]*** *Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

a. Ecrire la fonction ResTriSup *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ où $\mathbb{U}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible et $\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^n$.*

b. Ecrire la fonction algorithmique FactWU *retournant les matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$.*

c. On suppose la fonction $\boldsymbol{x}\leftarrow$ ResTriInf$(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$ retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{L}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{L}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et $\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^n$, déjà écrite. Ecrire la fonction algorithmique ResWU *retournant $\boldsymbol{x}$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ en utilisant sa factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.*

□

R. 3 a. Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. Pour résoudre le système $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, on utilise l'algorithme de remontée:
pour i allant de n à 1 (pas de -1) faire

$$x_i = \big(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j}x_j\big)/U_{i,i}.$$

Données : $\mathbb{U}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

```
1: Fonction x ← ResTriSup( U, b )
2:   Pour i ← n à 1 faire(pas de −1)
3:     S ← 0
4:     Pour j ← i + 1 à n faire
5:       S ← S + U(i, j) ∗ x(j)
6:     Fin Pour
7:     x(i) ← (b(i) − S)/U(i, i)
8:   Fin Pour
9: Fin Fonction
```

---

b. Voici l'algorithme final:

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$.
Résultat : $\mathbb{U}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = 1,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$
$\mathbb{W}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure.

```
1: Fonction [W, U] ← FactWU( A )
2:   W ← 0_n                                  ▷ 0_n matrice nulle n × n
3:   U ← I_n                                  ▷ I_n matrice identitée n × n
4:   Pour i ← 1 à n faire
5:     Pour j ← i à n faire                   ▷ Calcul de la colonne i de W
6:       S_1 ← 0
7:       Pour k ← 1 à i − 1 faire
8:         S_1 ← S_1 + W(j, k) ∗ U(k, i)
9:       Fin Pour
10:      W(j, i) ← A(j, i) − S_1
11:    Fin Pour
12:    Pour j ← i + 1 à n faire               ▷ Calcul de la ligne i de U
13:      S_2 ← 0
14:      Pour k ← 1 à i − 1 faire
15:        S_2 ← S_2 + W(i, k) ∗ U(k, j)
16:      Fin Pour
17:      U(i, j) ← (A_{i,j} − S_2) /W(i, i).
18:    Fin Pour
19:  Fin Pour
20: Fin Fonction
```

---

c. On utilise la **Q.1**-d.

Voici la fonction ResWU permettant de résoudre, par une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$, le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{WU}$,
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

```
Fonction x ← ResWU( A, b )
    [W, U] ← FactWU(A)                    ▷ Factorisation WU
    y ← ResTriInf(W, b)                   ▷ Résolution du système Wy = b
    x ← ResTriSup(U, y)                   ▷ Résolution du système Ux = y
Fin Fonction
```

On admet le résultat suivant:

Théorème. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{WU}$ si et seulement si toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.*

Q. 4 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive.*

a. Rappeler la définition d'une matrice hermitienne définie positive.

b. Démontrer que $\mathbb{A}$ est inversible.

c. Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.

d. En déduire que $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{WU}$.

□

R. 4 a. $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne définie positive si

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \quad \text{et} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\},\ \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0.$$

b. $\mathbb{A}$ inversible est équivalent $\ker \mathbb{A} = \{0\}$.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, tel que $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0$. Montrons que $\boldsymbol{x} = 0$.
Par l'absurde, supposons $\boldsymbol{x} \neq 0$. Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$$

ce qui n'est pas possible car $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0$, et $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$.

c. On écrit la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme de matrices blocs carrés 2×2 dont le premier bloc diagonal est dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et le second dans $\mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_k & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right)$$

On veut démontrer que

$$\forall y \in \mathbb{C}^k \backslash \{0\},\ \langle \Delta_k \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle > 0.$$

Soit $y \in \mathbb{C}^k \backslash \{0\}$. On note $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ le vecteur tel que $x_i = y_i$, $\forall i \in [\![1, k]\!]$ et $x_i = 0$, $\forall i \in [\![k+1, n]\!]$. On note que $\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{y} \neq 0$. On a

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_k & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{y} \\ \hline \boldsymbol{O}_{n-k} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \Delta_k \boldsymbol{y} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1}\boldsymbol{y} \end{array}\right)$$

et donc

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \left\langle \left(\begin{array}{c} \Delta_k \boldsymbol{y} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1}\boldsymbol{y} \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{y} \\ \hline \boldsymbol{O}_{n-k} \end{array}\right) \right\rangle = \langle \Delta_k \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle .$$

Comme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, et $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive, on a $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ et donc $\langle \Delta_k \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle > 0$.

d. Comme toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives, elles sont inversibles. D'après la **Q.4**, $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{WU}$ et d'après la **Q.1**-c, elle est unique.