

B.2 Algèbre linéaire

NOTE

Toute cette partie peut être joyeusement omise par tout Homo sapiens *algebra linearis* compatible. Toutefois une lecture rapide permet de se rafraîchir la mémoire.

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n , sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

B.2.1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par $\mathbf{v}^t$ et $\mathbf{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\mathbf{v}^t = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n), \quad \mathbf{v}^* = (\overline{v_1} \quad \overline{v_2} \quad \dots \quad \overline{v_n})$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α .

Définition B.2.1. • Le vecteur ligne $\mathbf{v}^t$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\mathbf{v}$.

• Le vecteur ligne $\mathbf{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\mathbf{v}$.

Définition B.2.2. L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (\text{B.12})$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (\text{B.13})$$

est appelée **produit scalaire euclidien** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **hermitien**^a si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_n.$$

^aLa convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (B.13) :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Définition B.2.3. Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

◊ Deux **vecteurs** $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont **Orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

◊ Un **vecteur** $\mathbf{v}$ est **orthogonal à une partie** U de V si

$$\forall \mathbf{u} \in U, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

On note $\mathbf{v} \perp U$.

◊ Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$$

où $\delta_{i,j}$ est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Définition B.2.4. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est représenté par $\mathbf{0}_n$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition B.2.5. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur $\mathbf{u}$ par

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u} = \frac{1}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u} \mathbf{u}^* \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n. \quad (\text{B.14})$$

La matrice $\mathbb{P}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \mathbf{u}^*$ s'appelle la **matrice de la projection orthogonale** suivant le vecteur $\mathbf{u}$.

Proposition B.2.1 (Procédé de Gram-Schmidt). Soit $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de $\mathbb{K}^n$. On construit successivement les vecteurs $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle} \mathbf{u}_k, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ils forment une **base orthogonale** de $\mathbb{K}^n$ et $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (voir Exercice 2.3.13, page 257).

Pour construire une **base orthonormale** $\{\mathbf{z}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale:

$$\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle^{1/2}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

B.2.2 Matrices

Généralités

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée **matrice de type** (m, n) , et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type (m, n) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $A_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (A_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi le noter $A_{i,j}$.

Définition B.2.6. La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbf{0}_{m,n}$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Si $m = n$ on peut aussi noter $\mathbf{0}_n$ cette matrice.

Définition B.2.7. ◊ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^* \mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^m, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

◊ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la

matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^t \mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^t)_{ij} = A_{ji}$.

Définition B.2.8. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, le **produit** $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}. \quad (\text{B.15})$$

EXERCICE 2.2.1 résultats à savoir

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, montrer que

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t \mathbb{A}^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (\text{B.1})$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^* \mathbb{A}^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (\text{B.2})$$

Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.

Définition B.2.9. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors les éléments $A_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $A_{ij} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.

Définition B.2.10. On appelle **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et les éléments hors-diagonaux nuls. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Définition B.2.11. Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **invertible** ou **régulière** s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I} \quad (\text{B.16})$$

Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est **singulière** ou **non invertible**.

On peut noter que la matrice $\mathbb{B}$ est unique. En effet, soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ vérifiant (B.16). On a alors $\mathbb{A}\mathbb{B}_2 = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2) = \mathbb{B}_1$. On a aussi $\mathbb{B}_1\mathbb{A} = \mathbb{I}$ et donc $(\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_2$. Le produit des matrices étant associatif on a $\mathbb{B}_1(\mathbb{A}\mathbb{B}_2) = (\mathbb{B}_1\mathbb{A})\mathbb{B}_2$ et donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

Définition B.2.12. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice invertible. On note $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'unique matrice vérifiant

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}. \quad (\text{B.17})$$

Cette matrice est appelée **matrice inverse** de $\mathbb{A}$.

Définition B.2.13. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

- ◊ On note $\ker(\mathbb{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n ; \mathbb{A}\mathbf{v} = 0\}$ le **noyau** de $\mathbb{A}$.
- ◊ On note $\text{im}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\mathbf{v} \in \mathbb{K}^m ; \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n\}$ l'**image** de $\mathbb{A}$.
- ◊ On note $\text{rank}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{im}(\mathbb{A}))$ le **rang** de $\mathbb{A}$.

Théorème B.2.1 ((théorème du rang)). Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a

$$\text{rank}(\mathbb{A}) + \dim(\ker(\mathbb{A})) = n$$

Proposition B.2.2. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

- a. $\mathbb{A}$ est inversible,
- b. $\text{rank}(\mathbb{A}) = n$,
- c. $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n, \mathbb{A}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$, (i.e. $\ker \mathbb{A} = \{0\}$)
- d. $\det(\mathbb{A}) \neq 0$,
- e. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles,
- f. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$,
- g. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

EXERCICE 2.2.2 résultats à savoir

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Montrer que $\mathbb{A}\mathbb{B}$ inversible et

$$(\mathbb{A}^t)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (\text{B.1})$$

$$(\mathbb{A}^*)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (\text{B.2})$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \quad (\text{B.3})$$

$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A} \quad (\text{B.4})$$

Définition B.2.14. Une matrice **carrée** $\mathbb{A}$ est :

- ◊ **symétrique** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,
- ◊ **hermitienne** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$,
- ◊ **normale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$,
- ◊ **orthogonale** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$,
- ◊ **unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

Proposition B.2.3. • une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.

- une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse $\mathbb{A}^t$ (resp. $\mathbb{A}^*$).

Définition B.2.15. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

- ◊ Elle est **définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (\text{B.18})$$
- ◊ Elle est **semi définie positive** si
$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (\text{B.19})$$

EXERCICE 2.2.3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 Que peut-on dire de la matrice $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$? Et si la matrice $\mathbb{A}$ est inversible?

Q. 2 Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne semi-définie positive à partir d'une matrice aléatoire quelconque.

Q. 3 Proposer une technique permettant de générer une matrice hermitienne définie positive à partir d'une matrice triangulaire inférieure inversible aléatoire.

Définition B.2.16. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Définition B.2.17. Soit T_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. A tout élément $\sigma \in T_n$, on associe la matrice de permutation de $\mathbb{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par

$$(\mathbb{P}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

EXERCICE 2.2.4 résultats à savoir

Montrer qu'une matrice de permutation est orthogonale.

Définition B.2.18. Soient $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et T_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Le déterminant d'une matrice $\mathbb{A}$ est défini par

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in T_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^n A_{\sigma(j),j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ .

Proposition B.2.4 (Méthode de Laplace ou des cofacteurs). Soit $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{A}^{[i,j]} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\mathbb{A}$. On a alors le développement par rapport à la ligne $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(\mathbb{A}^{[i,j]}), \tag{B.20}$$

et le développement par rapport à la colonne $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(\mathbb{A}^{[i,j]}). \tag{B.21}$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det(\mathbb{A}^{[i,j]})$ est appelé le cofacteur du terme $A_{i,j}$.

Définition B.2.19. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\mathbb{A}$ s'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \tag{B.22}$$

Le vecteur $\mathbf{u}$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .
Le couple $(\lambda, \mathbf{u})$ est appelé élément propre de $\mathbb{A}$.

Définition B.2.20. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$. Le sous-espace

$$E_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\} = \ker(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{B.23}$$

est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ . La dimension de E_λ est appelée multiplicité géométrique de la valeur propre λ .

Définition B.2.21. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré n défini par

$$\mathcal{P}_\mathbb{A}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{B.24}$$

est appelé polynôme caractéristique de la matrice $\mathbb{A}$.

Proposition B.2.5. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ◊ Les racines complexes du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_\mathbb{A}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$.
- ◊ Si la racine λ de $\mathcal{P}_\mathbb{A}$ est de multiplicité k , on dit que la valeur propre λ est de Multiplicité algébrique k .
- ◊ La matrice $\mathbb{A}$ possède n valeurs propres distinctes ou non.

Définition B.2.22. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les n valeurs propres de $\mathbb{A}$. Le spectre de la matrice $\mathbb{A}$ est le sous-ensemble

$$\text{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \tag{B.25}$$

du plan complexe.

Proposition B.2.6. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les relations suivantes

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbb{A}), \tag{B.26}$$

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathbb{A}), \tag{B.27}$$

$$\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), \tag{B.28}$$

$$\text{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \text{tr} \mathbb{A} + \text{tr} \mathbb{B}, \tag{B.29}$$

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), \tag{B.30}$$

$$\det(\mathbb{A}^*) = \det(\mathbb{A}). \tag{B.31}$$

Définition B.2.23. Le rayon spectral d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre ≥ 0 défini par

$$\rho(\mathbb{A}) = \max \{|\lambda_i(\mathbb{A})|; i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

Matrices particulières

Définition B.2.24. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est :

- ◊ **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◊ **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- ◊ **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- ◊ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◊ **à diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\text{B.32})$$

- ◊ **à diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (\text{B.33})$$

Proposition B.2.7. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice AB est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

De plus on a

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Preuve. (voir Exercice 2.3.8, page 248) $\square$

Proposition B.2.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

- a. A est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).
- b. Si A est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(A^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(A)_{i,i}}$$

Preuve. (voir Exercice 2.3.18, page 260) $\square$

Définition B.2.25. On appelle **matrice bande** une matrice A telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j - i| \leq c$. c est la **demi largeur de bande**.

Lorsque $c = 1$, la matrice est dite **tridiagonale**. Lorsque $c = 2$, la matrice est dite **pentadiagonale**.

Définition B.2.26. On appelle **sous-matrice** d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n - k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée A d'ordre n , on obtient la **sous matrice principale** d'ordre k .

Définition B.2.27. On appelle **matrice bloc** une matrice $A \in \mathcal{M}_{N,M}$ écrite sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, A_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i, m_j}$. On a $N = \sum_{i=1}^p n_i$ et $M = \sum_{j=1}^q m_j$.

On dit que A est une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

Propriété B.2.1 (Multiplication de matrices blocs). Soient $A \in \mathcal{M}_{N,M}$ et $B \in \mathcal{M}_{M,S}$. Le produit $P = AB \in \mathcal{M}_{N,S}$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices A et B sont compatibles par blocs : il faut que le nombre de blocs colonne de A soit égale au nombre de blocs ligne de B avec correspondance des dimensions.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q,1} & \cdots & B_{q,r} \end{pmatrix}$$

avec $A_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i, m_k}$ et $B_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k, s_j}$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. La matrice produit P s'écrit alors sous la forme bloc

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1} & \cdots & P_{p,r} \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket P_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, s_j}$ et

$$P_{i,j} = \sum_{k=1}^q A_{i,k} B_{k,j}.$$

Définition B.2.28. On dit qu'une matrice bloc-carrée A est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $A_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$). Elle s'écrit donc sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}).$$

Définition B.2.29. On dit qu'une matrice bloc-carrée A est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $A_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition B.2.9. Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré décomposée en $n \times n$ blocs. Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_{i,i} \quad (\text{B.34})$$

Proposition B.2.10. Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si A est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si A est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. **supérieure**) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. **supérieure**).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbb{O} \\ \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{A}^{-I} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-I} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n}^{-I} \end{pmatrix}$$

B.2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

Définition B.2.30. Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ◇ $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◇ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (*inégalité triangulaire*).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i| \\ \|\mathbf{v}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{v}\|_\infty &= \max_i |v_i|.\end{aligned}$$

Théorème B.2.2. Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme,

Proposition B.2.11. *Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$*

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q. \quad (\text{B.35})$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Hölder.

Définition B.2.31. Deux normes $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont équivalentes s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|v'\| \leq C \|v\| \quad \text{et} \quad \|v\| \leq C' \|v'\| \quad \text{pour tout } v \in V. \quad (\text{B.36})$$

Proposition B.2.12. *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Définition B.2.32. Une *norme matricielle* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

- $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0,$
- $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$
- $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (*inégalité triangulaire*)
- $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|, \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Proposition B.2.13. *Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|, \quad (\text{B.37})$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

De plus

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \quad (\text{B.38})$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (\text{B.39})$$

Il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \text{ et } \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (\text{B.40})$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \quad (\text{B.41})$$

Théorème B.2.3. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{B.42})$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A} \mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \quad (\text{B.43})$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{B.44})$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{U}\|_2. \quad (\text{B.45})$$

Par ailleurs, si la matrice $\mathbb{A}$ est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \quad (\text{B.46})$$

Proposition B.2.14. a. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.

b. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème B.2.4. a. Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|. \quad (\text{B.47})$$

b. Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\| \leq \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \quad (\text{B.48})$$

Théorème B.2.5. L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j) \in [1, n]^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}, \quad (\text{B.49})$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n , est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_E \leq \sqrt{n} \|\mathbb{A}\|_2, \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \quad (\text{B.50})$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème B.2.6. a. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et $\mathbb{B}$ une matrice vérifiant

$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$

Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et

$$\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$

b. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement

$$\|\mathbb{B}\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

B.2.4 Réduction des matrices

Définition B.2.33. Soit $A : V \rightarrow V$ une application linéaire, représentée par une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [1, n]}$. Relativement à une autre base $\{\mathbf{f}_i\}_{i \in [1, n]}$, la même application est représentée par la matrice

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} \quad (\text{B.51})$$

où $\mathbb{P}$ est la matrice inversible dont le j -ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur $\mathbf{f}_j$ dans la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [1, n]}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_n \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.52})$$

La matrice $\mathbb{P}$ est appelée **matrice de passage de la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [1, n]}$ dans la base $\{\mathbf{f}_i\}_{i \in [1, n]}$** .

Définition B.2.34. On dit que la matrice carrée $\mathbb{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $\mathbb{P}$ telle que la matrice $\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ soit diagonale.

Remarque B.2.1. On notera que, dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matrice $\mathbb{A}$, et que le j -ème vecteur colonne $\mathbf{p}_j$ de la matrice $\mathbb{P}$ est formé des composantes, dans la même base que $\mathbb{A}$, d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j . On a

$$\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff \mathbb{A} \mathbf{p}_j = \lambda_j \mathbf{p}_j, \quad \forall j \in [1, n]. \quad (\text{B.53})$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Théorème B.2.7. a. Etant donnée une matrice carrée $\mathbb{A}$, il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{U}$ soit triangulaire.

b. Etant donnée une matrice normale $\mathbb{A}$, il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{U}$ soit diagonale.

c. Etant donnée une matrice symétrique $\mathbb{A}$, il existe une matrice orthogonale $\mathbb{O}$ telle que la matrice $\mathbb{O}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{O}$ soit diagonale.

B.2.5 Suites de vecteurs et de matrices

Définition B.2.35. Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\mathbf{v}_k)$ d'éléments de V **converge vers un élément** $\mathbf{v} \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$

Théorème B.2.8. Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
- b. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur $\mathbf{v}$,
- c. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
- d. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Théorème B.2.9. Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

B.3 Receuil d'exercices

B.3.1 Algorithmique numérique

EXERCICE 2.3.1

Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1 Ecrire une fonction `dot` permettant de calculer le produit scalaire du vecteur $\mathbf{u}$ par $\mathbf{v}$, noté mathématiquement par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Q. 2 Ecrire une fonction `norm2` permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{u}$ donnée par $\|\mathbf{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Soient a et b deux réels.

Q. 3 Ecrire une fonction `aUpbV` permettant de calculer le vecteur $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$.

Q. 4 Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$ avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Correction