Ing. MACS 1 **2025-2026**

Analyse Numérique I : Résolution de systèmes linéaires Méthodes directes[*]

1 Conditionnement

Définition 1.1. *Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière $\mathbb{A}$, associé à cette norme, est le nombre*

$$\mathrm{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|.$$

Nous noterons $\mathrm{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|_p$.

Proposition 1.2. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice régulière. On a les propriétés suivantes*

a. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\mathrm{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \mathrm{cond}(\mathbb{A})$.

b. $\mathrm{cond}_p(\mathbb{A}) \geqslant 1$, $\forall p \in [\![1, +\infty]\!]$.

c. $\mathrm{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ *si et seulement si* $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *et* $\mathbb{Q}$ *matrice unitaire*

Théorème 1.3. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \mathrm{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ donnée, on peut trouver des vecteurs $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

Théorème 1.4. *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$ deux matrices inversibles. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors on a

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\|} \leqslant \mathrm{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Remarque. *Une matrice est donc* ***bien conditionnée*** *si son conditionnement est proche de* 1.

[*]Compilé le 2026/11/16 à 11:45:24.

2 Méthodes directes

2.1 Résultats préliminaires

Lemme 2.1 (matrice de permutation 3.1.2 p.69). *Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j. Alors la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est symétrique et orthogonale. Pour toute matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

*a. la matrice $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **lignes** i et j,*

*b. la matrice $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ est matrice $\mathbb{A}$ dont on a permuté les **colonnes** i et j,*

Lemme 2.2 (matrice d'élimination 3.1.1 p.67). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. Il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité telle que*

$$\mathbb{E}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{1}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Théorème 2.3 (décomposition de Schur ★★★★★ 3.1.1 p.63). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \tag{2}$$

2.2 Méthode de Gauss-Jordan

Proposition 2.4. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{G}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.*

2.3 Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Théorème 2.5 (Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ ★★★★★ 3.1.4 p.76). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe*

- *une unique matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure (lower triangular en anglais) à diagonale unité,*
- *une unique matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (upper triangular en anglais) inversible*

telles ques

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

Corollaire 2.6 (★★★★★ 3.1.1 p.78). *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.*

Théorème 2.7 (Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ avec permutations ★★★★★ 3.1.5 p.78). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Il existe une matrice $\mathbb{P}$, produit de matrices de permutation, une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles ques*

$$\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}. \tag{3}$$

2.4 Factorisation $\mathbb{LDL}^*$

Théorème 2.8 (Factorisation $\mathbb{LDL}^*$ ★★★★★ 3.1.6 p.84). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation $\mathbb{LU}$. Alors $\mathbb{A}$ s'écrit sous la forme*

$$\mathbb{A} = \mathbb{LDL}^* \tag{4}$$

où $\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U}$ est une matrice à coefficients réels.

Corollaire 2.9 (★★★★★ 3.1.2 p.84). *Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{LDL}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

2.5 Factorisation de Cholesky

Définition 2.10 (3.1.1 p.84). *Une **factorisation régulière de Cholesky** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{BB}^*$ où $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.*
*Si les coefficients diagonaux de $\mathbb{B}$ sont positifs, on parle alors d'une **factorisation positive de Cholesky**.*

Théorème 2.11 (Factorisation de Cholesky ★★★★★ 3.1.7 p.84). *La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky **si et seulement si** la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.*

2.6 Factorisation $\mathbb{QR}$

Définition 2.12 (Matrice élémentaire de Householder 3.1.2 p.90). *Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On appelle **matrice élémentaire de Householder** la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*. \tag{5}$$

Propriété 2.13 (3.1.1 p.90). *Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.*

Propriété 2.14 (3.1.2 p.90). *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$. On a alors*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}. \tag{6}$$

et

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad si\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0. \tag{7}$$

Théorème 2.15 (3.1.8 p.90). *Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \ [\pi]$. On a alors*

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}\|_2} \right) \boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}. \tag{8}$$

Corollaire 2.16 (3.1.3 p.94). *Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique*

de $\mathbb{C}^n$. Alors, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ donné par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1\right\|_2}$$

est bien défini et on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{e}_1. \tag{9}$$

Lemme 2.17. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc*

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}$$

où $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$, premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$, est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Alors $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ est bien défini par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n}{\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = -\|\mathbb{V}_{1,:}\|_2 \, e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

et on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V}_{1,:} = \alpha \boldsymbol{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

De plus, en posant $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$, on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right)$$

Théorème 2.18 (Factorisation $\mathbb{QR}$ ★★★★★ 3.1.9 p.95)**.** *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{QR}. \tag{10}$$

Si $\mathbb{A}$ est réelle alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont aussi réelles et l'on peut choisir $\mathbb{Q}$ de telle sorte que les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}$ soient positifs. De plus, si $\mathbb{A}$ est inversible alors la factorisation est unique.