Trou dimensionnel dans les groupes de Lie compacts semisimples via les séries de Fourier

Nicolas de Saxcé

23 janvier 2013

Résumé

Soit G un groupe de Lie réel compact semisimple de dimension d. Nous démontrons ici qu'il existe un $\alpha_0 < d$ tel que toute partie borélienne de G de dimension de Hausdorff strictement supérieure à α_0 engendre G comme groupe abstrait. Une propriété analogue de « trou dimensionnel » est aussi démontrée pour les groupes spéciaux linéaires $SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$ sur les entiers p-adiques.

1 Introduction

Dans un groupe métrique G, on peut demander quelles sont les dimensions de Hausdorff possibles pour un sous-groupe borélien de G. Dans [12], Erdös et Volkmann s'intéressent à cette question pour $G = \mathbb{R}$ (muni de l'addition) et construisent des sous-groupes boréliens de dimension arbitraire entre 0 et 1 (voir aussi [14], example 12.4). Dans le groupe $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques une construction similaire est donnée par Abercrombie dans [1] ; là encore, on peut construire des sous-groupes de dimension de Hausdorff arbitraire entre 0 et 1. En fait, dans tout groupe de Lie nilpotent connexe, on peut construire des sous-groupes boréliens de dimension arbitraire entre 0 et $\dim G$ (cf. [20]). Nous nous intéressons ici aux cas des groupes de Lie compacts semisimples. La situation est alors tout à fait différente : pour certaines valeurs de $\alpha \in [0, \dim G]$, il n'existe pas de sous-groupe de G de dimension de Hausdorff α. Ce phénomène est à rapprocher du théorème d'Edgar et Miller [11], démontré indépendamment par Bourgain dans le cas réel [4], [6] : la dimension de Hausdorff d'un sous-anneau strict de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$ est nécessairement égale à 0. La conjecture de ce résultat, dite « ring conjecture », fut énoncée en 1966 par Erdös et Volkmann dans [12], mais c'est Falconer qui, en démontrant qu'un sous-anneau borélien strict de $\mathbb{R}$ ne pouvait être de dimension de Hausdorff strictement supérieure à $\frac{1}{2}$, obtint les premiers résultats dans cette direction ([13], voir aussi [18], chapter 12). Les techniques utilisées ici s'inspirent justement de la démonstration de Falconer : on se donne une mesure borélienne finie μ sur G dont on suppose qu'elle vérifie, pour un certain $C \geqslant 0$, et pour un certain $\alpha > 0$, pour tout $\rho > 0$, pour toute boule B_ρ de rayon ρ,

$$\mu(B_\rho) \leqslant C.\rho^\alpha,$$

(on dira qu'une telle mesure est *α-hölderienne*) et par l'étude de la transformée de Fourier de μ, on démontre le résultat principal suivant.

Théorème 1.1. *Si G est un groupe de Lie réel semisimple compact, il existe $\alpha_0 < \dim G$ tel que, si μ est une mesure borélienne finie α-hölderienne sur G, avec $\alpha > \alpha_0$, alors μ possède une puissance de convolution absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur G. La valeur de α_0 donnée par la démonstration est $\alpha_0 = \dim G - \frac{|\Delta|-p}{2}$, où Δ est un système de racines de G et p est le nombre maximal de racines de Δ contenues dans un même hyperplan.*

Le calcul de p et α_0 n'est pas difficile, on donne en annexe un tableau des valeurs prises par ces quantités pour chaque diagramme de racines irréductible réduit. Le théorème 1.1 a deux corollaires :

Corollaire 1.2. *Soit G un groupe de Lie réel semisimple compact. Si A est une partie borélienne de G de dimension de Hausdorff supérieure à α_0, alors, pour un certain entier l, $A^l = G$, où A^l est l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent comme produit de l éléments de A.*

Et donc :

Corollaire 1.3 (Trou dimensionnel)**.** *Si G est un groupe de Lie réel compact semisimple, il existe $\alpha_0 < \dim G$ tel que G soit le seul sous-groupe borélien de G de dimension de Hausdorff strictement supérieure à α_0.*

Dans la preuve, α_0 apparaît comme $(\dim G - t_0)$, où $t_0 > 0$ est tel que, pour toute représentation irréductible V_λ de G de plus haut poids λ, $\dim V_\lambda \geqslant \|\lambda\|^{t_0}$. Ce type de minoration, qui s'obtient ici grâce à la formule de Weyl, est une caractéristique importante des groupes semisimples. La méthode de Sarnak et Xue [19], les travaux reliés de Bourgain et Gamburd [8, 9, 7] pour établir certaines propriétés de trou spectral, ainsi que les démonstrations des résultats mentionnés dans le paragraphe suivant, utilisent crucialement des inégalités analogues à celle qui nous intéresse ici.

Les résultats sur les sous-anneaux de dimension de Hausdorff fractionnaire de $\mathbb{R}$ ont un analogue dans le cadre des corps finis : si p est un nombre premier, toute partie A de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de cardinal supérieur à $p^{\frac{3}{4}}$ vérifie $A^2 + A^2 + A^2 = \mathbb{F}_p$ (voir Bourgain [5], lemma 1). De même, on peut voir une analogie entre les résultats démontrés ici et ceux de Gowers [15] sur les groupes quasi aléatoires, et notamment sur les groupes algébriques simples sur un corps fini (voir aussi [10]) : si G est un groupe fini simple de type de Lie, il existe $\epsilon > 0$ (ne dépendant que du rang de G) tel que, si $A \subset G$ vérifie $|A| \geqslant |G|^{1-\epsilon}$, alors $A^3 = G$. On démontre ici que les groupes de Lie semisimples compacts ont une propriété semblable :

Théorème 1.4. *Soit G un groupe de Lie réel semisimple compact. Si $A \subset G$ est une partie borélienne de dimension supérieure à $\frac{2\dim G + \alpha_0}{3}$, alors A^3 contient un ouvert non vide.*

On obtient enfin une inégalité de convolution, dans l'esprit de celle de Babai Nikolov et Pyber [2], qui permet de donner une borne inférieure non triviale sur la dimension d'un ensemble produit dans G :

Théorème 1.5 (Inégalité dimensionnelle)**.** *Soit G un groupe de Lie réel semisimple compact, et α_0 (comme ci-dessus) tel que, pour toute représentation irréductible de G, on ait $\dim V_\lambda \geqslant \|\lambda\|^{d-\alpha_0}$. Si A et B sont deux parties boréliennes de G, alors*

$$\dim AB \geqslant \min\{d, \dim_H A + \dim_H B - \alpha_0\}.$$

La méthode utilisée pour démontrer les propriétés précédentes s'adapte aussi à l'étude des sous-groupes boréliens des groupes de la forme $G = \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$ où $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique simple défini sur $\mathbb{Z}$, p un nombre premier, et $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. On note G_n le n-ième sous-groupe de congruence de G, i.e. le noyau de la réduction modulo p^n, et on munit G de la métrique bi-invariante naturelle

$$d(x, y) = \min\{p^{-n} \mid xy^{-1} \in G_n\}.$$

Dans ce cadre, ce sont les propriétés quasi-aléatoires, au sens de Gowers [15], des quotients de congruence de G qui permettent de minorer la dimension d'une représentation linéaire complexe de G. Il s'agit d'étendre aux groupes de la forme $\mathbf{G}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ des résultats de Landazuri et Seitz pour les groupes $\mathbf{G}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (cf. lemme 5.1). Pour éviter des considérations trop techniques, on se restreint ici à l'étude de $SL_{r+1}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. L'analogue du théorème 1.1 dans le cadre p-adique est le suivant.

Théorème 1.6. *Soit $G = SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$. Si μ est une mesure borélienne finie α-hölderienne sur G, avec $\alpha > r^2+r$, alors μ possède une puissance de convolution absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur G.*
Par conséquent, si $G = SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$, les seuls sous-groupes boréliens de G de dimension de Hausdorff strictement supérieure à $r^2 + r$ sont les sous-groupes ouverts de G.

On remarque que l'exposant donné par le théorème 1.6 est optimal, puisqu'un sous-groupe parabolique maximal est un sous-groupe fermé de $SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$ de dimension r^2+r. Cette remarque ne s'applique pas au cas réel. On adapte aussi au cadre p-adique l'inégalité de convolution et l'inégalité dimensionnelle pour les ensembles produits.

Après quelques notations et rappels préliminaires, une preuve du trou dimensionnel dans le cas réel est donnée dans les parties 3 et 4. La première moitié de la démonstration consiste à établir les résultats de base sur les représentations irréductibles de G qui permettront, dans la deuxième moitié, d'étudier les coefficients de Fourier d'une mesure hölderienne et de démontrer le théorème 1.1. La partie 5 est dédiée à l'étude du cas p-adique, où l'on reproduit, mutatis mutandis, la preuve du cas réel.

Remerciements : Cet article constitue une partie de ma thèse de doctorat, effectuée sous la direction d'Emmanuel Breuillard, que je tiens donc à remercier ici pour ses nombreux conseils et pour sa direction avisée. Mes remerciements vont aussi à Yves Benoist pour ses encouragements et ses réponses si précises à mes questions. Enfin, je remercie le MSRI à Berkeley pour son hospitalité durant le semestre *Quantitative Geometry*, ainsi que l'ERC, dont j'ai bénéficié du soutien, via Emmanuel Breuillard et la subvention GADA-208091.

2 Notations et rappels préliminaires

Le groupe G est le groupe compact dont on veut étudier les sous-groupes boréliens. On munit G de sa mesure de Haar, notée dx, normalisée par $\int_G dx = 1$ ainsi que d'une distance bi-invariante d. Si A et B sont deux parties de G, AB est l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent comme produit d'un élément de

A et d'un élément de B, A^{-1} est l'ensemble des inverses des éléments de A, et si k un entier positif, A^k est l'ensemble des produits de k éléments de A. Si μ et ν sont deux mesures sur G, $\mu \otimes \nu$ désigne la mesure produit sur $G \times G$ obtenue à partir de μ et ν, et $\mu * \nu$ désigne le produit de convolution de μ et ν, i.e. l'image de $\mu \otimes \nu$ par l'application produit. On définit encore $\tilde{\mu}$, la mesure inverse de μ, par $\tilde{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$ pour toute partie mesurable A dans G. On utilisera souvent dans les calculs le fait suivant : si μ est une mesure sur G invariante par conjugaison, alors, pour toute mesure ν sur G, $\mu * \nu = \nu * \mu$. On utilisera enfin la notation de Vinogradov pour comparer deux quantités x et y : on écrit $x \ll y$ s'il existe une constante C telle que $x \leqslant C.y$, et $x \ll_\kappa y$ si l'on veut spécifier que C dépend du paramètre κ.
Commençons par un premier lemme, classique, mais qui donne déjà l'idée qu'un sous-groupe de G qui contient trop d'éléments doit être égal à G tout entier.

Lemme 2.1. *Si A est une partie de G de mesure positive, alors A^2 contient un ouvert non vide de G. En particulier, si G est compact connexe, alors, pour un certain $l \in \mathbb{N}^*$, $A^l = G$.*

Démonstration. Notons χ_A la fonction indicatrice de l'ensemble A. Alors, χ_A est à la fois dans L^1 et dans L^∞ et par conséquent, $\phi = \chi_A * \chi_A$ est continue sur G ([17], proposition 5.4.2, page 65). Comme $\int_G \phi = (\int_G \chi_A)^2 > 0$ (A est de mesure positive), il existe un ouvert non vide sur lequel ϕ est strictement positive. En particulier que A^2 contient un ouvert non vide dans G.
Si on suppose maintenant G connexe, cela implique que $G = \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} A^l$ et si de plus G est compact, on doit même avoir, pour un certain l, $A^l = G$. □

Définition 2.2 (Transformée de Fourier)**.** *Si μ est une mesure borélienne finie sur G, et si π est une représentation irréductible unitaire de dimension finie de G, on définit le coefficient de Fourier de μ en π par :*

$$\hat{\mu}(\pi) = \int_G \pi(x) d\mu(x).$$

L'application $\mu \mapsto \hat{\mu}(\pi)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{M}(G)$ (ensemble des mesures boréliennes finies sur G) muni de la convolution, dans l'algèbre $\mathrm{End}(V_\pi)$ des endomorphismes de V_π, munie de la composition. Si $u \in \mathrm{End}(V_\pi)$ on note u^* l'adjoint de u. L'espace $\mathrm{End}(V_\pi)$ est muni de la norme de Hilbert-Schmidt définie par $\|u\|_{HS}^2 = \mathrm{Tr}(uu^*)$. Le théorème principal sur la transformée de Fourier des groupes compacts est dû à Peter et Weyl.

Théorème 2.3 (Peter-Weyl)**.** *La transformation de Fourier induit un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre $L^2(G)$ et $\bigoplus \mathrm{End}(V_\pi)$, où $\mathrm{End}(V_\pi)$ est muni de la norme $\sqrt{\dim V_\pi}\|.\|_{HS}$ et la somme est sur toutes les classes de représentations irréductibles unitaires de G. En particulier, pour toute fonction f dans $L^2(G)$,*

$$\|f\|_2^2 = \int_G |f(x)|^2 dx = \sum_{\pi \in \hat{G}} (\dim V_\pi) \|\hat{f}(\pi)\|_{HS}^2.$$

Pour étudier les coefficients de Fourier d'une mesure, on utilisera aussi sur $\mathrm{End}(V_\pi)$ la norme d'opérateur $\|.\|_{op}$ associée à la structure hilbertienne de V. Pour u et v dans $\mathrm{End}(V_\pi)$, on a $\|uv\|_{HS} \leqslant \|u\|_{op}\|v\|_{HS}$. Pour plus de détails sur la transformation de Fourier sur les groupes compacts, on renvoie à [21].

3 Représentations des groupes de Lie réels compacts semisimples

Ici, G est un groupe de Lie réel compact semisimple ; on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie semisimple complexe associée à G, T un tore maximal de G, $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ associée à T, Δ un système de racines, Π une base de Δ, et Δ^+ les éléments positifs de Δ relativement à Π. On note aussi d une métrique riemannienne bi-invariante sur G.
Une représentation irréductible est entièrement caractérisée par son plus haut poids. De plus, si l'on note r le rang de G (i.e. la dimension de T), alors l'ensemble des plus haut poids possibles est paramétré par $\mathbb{N}^r$. Les représentations irréductibles de G sont donc elles-aussi paramétrées par $\mathbb{N}^r$. On munit l'espace des poids d'une norme euclidienne $\|.\|$ qui fait du groupe de Weyl un groupe d'isométries. On trouvera les démonstrations des propriétés élémentaires des représentations des groupes de Lie réels semisimples compacts dans [3], IX, §7.

Lemme 3.1. *Il existe une constante $c = c(G) > 0$ telle que, pour toute représentation irréductible unitaire π_λ de G, pour tout $g \in G$ tel que $d(g,1) \leqslant \frac{c}{\|\lambda\|}$,*

$$\|\pi_\lambda(g) - id_{V_\lambda}\|_{op} \leqslant \frac{\|\lambda\|}{c} d(g,1).$$

Démonstration. Quitte à conjuguer, on peut supposer que g est dans le tore maximal T, on peut alors écrire $g = e^H$, avec $H \in \mathfrak{h}$. Les valeurs propres de $\pi_\lambda(g)$ sont les $e^{\lambda'(H)}$, pour λ' décrivant l'ensemble des poids de la représentation π_λ. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\|\pi_\lambda(g) - id_{V_\lambda}\|_{op} &= \max |e^{\lambda'(H)} - 1| \\ &\leqslant 2. \max |\lambda'(H)| \\ &\leqslant 2.\|H\|. \max \|\lambda'\|.\end{aligned}$$

Mais le plus haut poids λ est de norme maximale parmi tous les poids de la représentation (cf. [16], theorem 5.5) et donc

$$\begin{aligned}\|\pi_\lambda(g) - id_{V_\lambda}\|_{op} &\leqslant 2.\|H\|.\|\lambda\| \\ &\leqslant \frac{\|\lambda\|}{c}.d(g,1).\end{aligned}$$

□

La minoration du lemme suivant est un point clef de la démonstration du trou dimensionnel, c'est ce qui permettra de majorer les coefficients de Fourier d'une mesure hölderienne. C'est ici qu'on utilise le plus la structure semisimple du groupe G. Une telle propriété n'est évidemment pas vérifiée par un groupe abélien.

Lemme 3.2. *Soit p le nombre maximal d'éléments de Δ contenus dans un hyperplan. Pour toute représentation unitaire irréductible de dimension finie V_λ de plus haut poids λ,*

$$\|\lambda\|^{\frac{|\Delta|-p}{2}} \ll \dim V_\lambda.$$

(La constante contenue dans la notation $\ll$ ne dépend ici que de du système de racines de G.)

Démonstration. Cette inégalité découle de la formule de dimension de Weyl ; on commence par remarquer que, pour $\epsilon = \epsilon(G) > 0$ assez petit, p est le nombre maximal d'éléments de Δ qui sont à une distance inférieure à ϵ d'un hyperplan. Cela tient au fait que Δ est fini. Ensuite, on écrit, si ρ désigne la demi-somme des racines positives :

$$\begin{aligned}\dim V_\lambda &= \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle} \\ &\geqslant \prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ d(\alpha,\lambda^\perp)\geqslant\epsilon}} \frac{\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle} \\ &\gg \|\lambda\|^{\frac{|\Delta|-p}{2}}.\end{aligned}$$

□

Pour un diagramme de racines donné, le calcul de p n'est pas difficile, mais un peu fastidieux si l'on s'astreint à en écrire tous les détails. À titre d'exemple, on traite ici le cas de A_n. Pour cela, on remarque d'abord qu'un sous-diagramme de racines de A_n ne saurait avoir aucune composante de type B, C, F ou G, car tous les éléments de A_n ont la même norme. De plus, si α et β sont deux éléments orthogonaux de A_n, alors, l'ensemble des éléments γ de A_n vérifiant $\langle\gamma,\alpha\rangle \neq 0$, $\langle\gamma,\beta\rangle \neq 0$ est de cardinal inférieur à 8, et cela montre qu'un sous-diagramme de A_n ne saurait contenir de composante de type D ou E. Par conséquent, un sous-diagramme Δ' de A_n s'écrit comme union disjointe

$$\Delta' = A_{k_1} \cup \cdots \cup A_{k_r}.$$

Mais alors,

$$|\Delta'| = \sum_{i=1}^{r} |A_{k_i}| = \sum_{i=1}^{r} k_i(k_i+1)$$

et si Δ' est de rang $n-1$, $\sum_{i=1}^{r} k_i = n-1$ et

$$|\Delta'| \leqslant n \sum_{i=1}^{r} k_i \leqslant n(n-1).$$

On a donc $p \leqslant n(n-1)$.
Par ailleurs, $A_{n-1} \subset A_n$ et $|A_{n-1}| = n(n-1)$, donc $p \geqslant n(n-1)$, et ainsi, pour A_n, on trouve $p = n(n-1)$.
Des raisonnements analogues permettent de calculer p pour chaque diagramme de racines réduit irréductible ; on donne en annexe, sous forme de tableau, les résultats obtenus.

Les propriétés que nous venons d'établir, combinées au théorème de Peter-Weyl, donnent le trou dimensionnel, c'est ce que nous expliquons dans la partie qui suit.

4 Mesures hölderiennes et coefficients de Fourier

Le but de cette partie est d'évaluer les coefficients de Fourier d'une mesure μ satisfaisant certaines propriétés. Dans la notation de Vinogradov, on autorise les constantes à dépendre à la fois du groupe ambiant G et de la mesure μ considérée.

4.1 Majoration des coefficients de Fourier

Le théorème 1.1 est une application du lemme suivant, qui permet de majorer les coefficients de Fourier des mesures hölderiennes :

Lemme 4.1. *Si μ est une mesure de probabilité borélienne sur G et si $N \geqslant 1$, alors,*

$$\sum_{\|\lambda\| \leqslant N} (\dim V_\lambda) \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll N^d . \mu * \tilde{\mu}(B_{\frac{1}{N}}),$$

où la somme est sur l'ensemble des plus haut poids λ de norme inférieure ou égale à N. En particulier, si μ est α-hölderienne, alors, pour tout plus haut poids λ,

$$\sum_{\|\lambda\| \leqslant N} (\dim V_\lambda) \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll N^{d-\alpha}.$$

Démonstration. Soit χ_N la fonction indicatrice de la boule de centre 1 et de rayon $\frac{c}{2N}$, où c est la constante du lemme 3.1. On remarque que χ_N est invariante par inverse et par conjugaison par les éléments de G. Soit aussi $f_N = \frac{1}{\int_G \chi_N} \chi_N$ et $\varphi_N = f_N * f_N$. Alors, φ_N vérifie les propriétés suivantes :
- $\int_G \varphi_N = 1$
- $\varphi_N(x) = 0$ si $d(x,1) > \frac{c}{N}$
- φ_N est invariante par inverse et par conjugaison
- $\varphi_N \ll N^d . \chi_{\frac{N}{2}}$.

Les trois premières propriétés sont claires, et la quatrième découle de ce que la mesure de Haar sur G est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité strictement positive (cf. [3], IX, §8). Grâce à la dernière propriété de φ_N, on a déjà :

$$(\mu * \tilde{\mu})(\varphi_N) \ll N^d . \mu * \tilde{\mu}(B_{\frac{1}{N}})$$

il reste donc à comparer $(\mu * \tilde{\mu})(\varphi_N)$ avec $\sum_\lambda (\dim V_\lambda) \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2$. Pour cela, écrivons :

$$\begin{aligned}
(\mu * \tilde{\mu})(\varphi_N) &= \varphi_N * (\mu * \tilde{\mu})(1) \\
&= (f_N * f_N * \mu * \tilde{\mu})(1) \\
&= (f_N * \mu) * (f_N * \tilde{\mu})(1) \\
&= \int_G (f_N * \mu)(x)(f_N * \mu)(x) dx \\
&= \sum_\lambda (\dim V_\lambda) \|\widehat{f_N}(\lambda) \hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2.
\end{aligned}$$

Cela donne déjà

$$\sum_{\|\lambda\| \leqslant N} (\dim V_\lambda) \|\widehat{f_N}(\lambda) \hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \leqslant (\mu * \tilde{\mu})(\varphi_N).$$

Ensuite, grâce au lemme 3.1, comme le support de f_N est inclus dans $B(1, \frac{c}{2N})$, pour tout plus haut poids λ de norme inférieure à N, $\|\widehat{f_N}(\lambda) - id\|_{op} \leqslant \frac{1}{2}$ et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f_N}(\lambda)\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS} &= \|\hat{\mu}(\lambda) + (\widehat{f_N}(\lambda) - id)\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS} \\
&\geqslant \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS} - \|(\widehat{f_N}(\lambda) - id)\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS} \\
&\geqslant \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS} - \|(\widehat{f_N}(\lambda) - id)\|_{op}\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}.
\end{aligned}$$

Cela suffit pour établir ce qu'on veut :

$$\sum_{\|\lambda\|\leqslant N} (\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \leqslant 4(\mu * \tilde{\mu})(\varphi_N).$$

□

Le lemme précédent implique notamment l'inégalité suivante, dont nous ferons usage plus tard.

Corollaire 4.2. *Si μ est une mesure de probabilité borélienne sur G, alors,*

$$\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll N^d . \frac{\mu * \tilde{\mu}(B_{\frac{1}{N}})}{\dim V_\lambda}.$$

4.2 Trou dimensionnel

La majoration du lemme 4.1 permet de démontrer le théorème 1.1, un peu précisé :

Théorème 4.3. *Si μ est une mesure borélienne finie α-hölderienne sur G, avec $\alpha > \alpha_0 = d - \frac{|\Delta|-p}{2}$, alors, μ^{*k} est absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur G dès que $k > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$.*

Démonstration. Soit μ une mesure borélienne finie α-hölderienne sur G, avec $\alpha > \alpha_0$. D'après le lemme 4.1, pour tout entier N,

$$A_N = \sum_{\|\lambda\|\leqslant N} (\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll N^{d-\alpha}.$$

En particulier, pour tout plus haut poids λ,

$$\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll \frac{\|\lambda\|^{d-\alpha}}{\dim V_\lambda}$$

puis, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\|\widehat{\mu^{*(k-1)}}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll_k \left(\frac{\|\lambda\|^{d-\alpha}}{\dim V_\lambda}\right)^{k-1},$$

et, en utilisant aussi la minoration de $\dim V_\lambda$ du lemme 3.2,

$$\|\widehat{\mu^{*(k-1)}}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll_k \|\lambda\|^{(k-1)(\alpha_0-\alpha)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{\|\lambda\|\leqslant N}(\dim V_\lambda)\|\widehat{\mu^{*k}}\|_{HS}^2 &\ll_k \sum_{n\leqslant N}(A_n - A_{n-1}) \max_{n-1\leqslant\|\lambda\|<n}\|\widehat{\mu^{*(k-1)}}(\lambda)\|_{HS}^2\\
&\ll_k \sum_{n\leqslant N}(A_n - A_{n-1})n^{(k-1)(\alpha_0-\alpha)}\\
&= A_N N^{(k-1)(\alpha_0-\alpha)}\\
&\qquad + \sum_{n\leqslant N-1} A_n(n^{(k-1)(\alpha_0-\alpha)} - (n+1)^{(k-1)(\alpha_0-\alpha)})\\
&\ll_k N^{d-\alpha_0-k(\alpha-\alpha_0)} + \sum_{n\leqslant N-1} n^{d-\alpha_0-k(\alpha-\alpha_0)-1}\\
&\ll_k N^{d-\alpha_0-k(\alpha-\alpha_0)} + 1,
\end{aligned}$$

pourvu que $k > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$.

Ainsi, dès que $k > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$, la somme $\sum_{\lambda\in\hat{G}}(\dim V_\lambda)\|\widehat{\mu^{*k}}(\lambda)\|_{HS}^2$ converge, et, par le théorème de Peter-Weyl, la puissance k-ième de μ pour la convolution est dans L^2. En particulier μ^{*k} est absolument continue par rapport à la mesure de Haar. $\square$

Reste à passer des mesures aux ensembles pour obtenir :

Corollaire 4.4. *Soit $\alpha > \alpha_0$. Si A est une partie borélienne de G de dimension de Hausdorff strictement supérieure à α, alors, pour $k > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$, A^k est de mesure positive. Par conséquent, pour un certain entier p, $A^p = G$.*

Démonstration. On utilise le théorème de Frostman (cf.[14], corollaire 4.12) : soit μ une mesure de probabilité à support compact inclus dans A, qui soit α-hölderienne, avec $\alpha > \alpha_0$. D'après le théorème précédent, pour $k > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$, la mesure μ^{*k} est absolument continue par rapport à la mesure de Haar, et donc son support est de mesure de Haar strictement positive. Comme A^k contient $\mathrm{Supp}(\mu^{*k})$, A^k est aussi de mesure positive, et le lemme 2.1 permet de conclure. $\square$

La preuve précédente montre que si A est une partie borélienne de dimension strictement supérieure à $\frac{d+\alpha_0}{2}$, alors A^2 est de mesure de Haar positive, et donc A^4 contient un ouvert non vide. On peut même obtenir un ouvert non vide dans A^3 si la dimension de A est assez grande :

Proposition 4.5. *Dès que $\dim_H A > \frac{2d+\alpha_0}{3}$, l'ensemble A^3 contient un ouvert non vide.*

Démonstration. On choisit une mesure μ à support compact inclus dans A, α-hölderienne avec $\alpha > \frac{2d+\alpha_0}{3}$ (par le théorème de Frostman). Le même calcul que dans la preuve du théorème 4.3 donne

$$\sum_{\|\lambda\|\leqslant N}(\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^3 \ll N^{d+\frac{\alpha_0}{2}-\frac{3\alpha}{2}} + 1 \ll 1.$$

La série de Fourier de μ^{*3} converge normalement, donc μ^{*3} est une fonction continue, et son support contient un ouvert non vide. Comme le support de μ^{*3} est inclus dans A^3, on a ce qu'on veut. $\square$

Exemple. Pour $G = SU(r+1)$, on calcule $d = \dim G = r^2 + 2r$, $|\Delta| = r(r+1)$, $p = r(r-1)$ et donc $\alpha_0 = r^2 + r$. Donc, si A est une partie borélienne de dimension strictement supérieure à $d - \frac{r}{3}$, alors A^3 contient un ouvert non vide.

Pour comparer, rappelons le résultat analogue pour les groupes algébriques simples sur les corps finis : si G est un groupe algébrique simple sur un corps fini, il existe $\epsilon > 0$ tel que, si A est une partie de G vérifiant $|A| \geqslant |G|^{1-\epsilon}$, alors, $A^3 = G$. Une telle borne sur le nombre de produits nécessaires pour obtenir G tout entier n'existe pas dans notre cadre, puisque si A est une boule de rayon $\frac{1}{n}$ centrée en l'identité, il faut au moins n produits pour atteindre les éléments à distance supérieure à 1 de l'identité. Le résultat démontré ici est donc un analogue satisfaisant du théorème de Gowers. Mais on peut encore poser la question suivante : étant donné un groupe de Lie réel compact semisimple G, existe-il $\epsilon > 0$ tel que, si A est une partie de G de dimension de Hausdorff supérieure à $\dim G - \epsilon$, alors A^2 contient un ouvert non vide ? Dans le cas du théorème de Gowers, l'exposant 3 est optimal, comme le montre l'exemple d'une partie A de cardinal strictement inférieur à $\frac{|G|}{2}$ telle que $A \cap A^{-1} = \varnothing$.

Corollaire 4.6 (Trou dimensionnel)**.** *Le groupe de Lie réel semisimple compact G n'admet pas de sous-groupe borélien strict de dimension de Hausdorff strictement supérieure à α_0.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du corollaire 4.4. □

La valeur de α_0 donnée par la preuve présentée ici n'est sans doute pas optimale : on peut conjecturer que toute partie borélienne dont la dimension de Hausdorff excède la dimension d'un sous-groupe fermé de G de dimension maximale, engendre G comme groupe abstrait. Pour $SU(r+1)$, par exemple, la valeur optimale de α_0 devrait être $r^2 = \dim U(r)$ tandis que la valeur donnée par ce qui précède est $r^2 + r$.

4.3 Inégalité dimensionnelle

Pour obtenir une inégalité de convolution analogue à celle de Babai, Nikolov et Pyber [2], on commence par choisir une suite d'unités approchées dont on peut majorer les coefficients de Fourier :

Lemme 4.7. *Il existe une suite d'unités approchées τ_N vérifiant :*
- *pour tout $N \in \mathbb{N}$, τ_N est à support dans $B(1, \frac{1}{N})$,*
- *pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|\tau_N\|_\infty \ll N^d$,*
- *pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{\|\lambda\| > N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda) \|\widehat{\tau_N}(\lambda)\|_{HS}^2 = O_\epsilon(1)$.*

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de l'identité, inclus dans $B(1,1)$, sur lequel l'exponentielle est inversible, et τ une fonction C^∞ à support compact dans U, telle que $\int_G \varphi = 1$. Pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_N(x) = C_N \tau(Nx)$, où la dilatation par N est à comprendre dans l'algèbre de Lie de G, et C_N est choisi de sorte que $\int_G \tau_N = 1$ (donc $N^d \ll C_N \ll N^d$).
Les deux premières propriétés de τ_N sont claires. Pour la troisième, on note Z l'élément de Casimir de G. Rappelons que si V_λ est une représentation irréductible de G de plus haut poids λ alors Z agit sur V_λ par multiplication par le scalaire $\|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2$, où ρ est la demi-somme des racines positives (cf. [16],

proposition 5.2proposition 5.28). Comme τ_N est infiniment dérivable, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z^k\tau_N$ est bien définie et dans L^2 ; en particulier,

$$\begin{aligned}\|Z^k\tau_N\|_2^2 &= \sum_\lambda (\dim V_\lambda)\|\widehat{Z^k\tau_N}(\lambda)\|_{HS}^2 \\ &= \sum_\lambda (\dim V_\lambda)(\|\lambda+\rho\|^2 - \|\rho\|^2)^{2k}\|\widehat{\tau_N}(\lambda)\|_{HS}^2 \\ &\gg N^{4k(1+\epsilon)} \sum_{\lambda > N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\widehat{\tau_N}\|_{HS}^2.\end{aligned}$$

Or, si on écrit Z^k dans les coordonnées exponentielles, on observe que

$$\|Z^k\tau_N\|_2 \leqslant \|Z^k\tau_N\|_\infty \ll_k C_N.N^{2k} \ll_k N^{2k+d}.$$

Et donc, si l'on choisit $k = k(\epsilon)$ tel que $2k\epsilon > d$, on trouve bien

$$\sum_{\lambda > N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\widehat{\tau_N}\|_{HS}^2 = O_\epsilon(1).$$

□

Cela permet de démontrer une inégalité réciproque à celle du lemme 4.1. On se donne une suite d'unités approchées τ_N comme dans le lemme précédent, et, pour μ une mesure borélienne finie sur G, on étudie les fonctions $\mu_N = \mu * \tau_N$ du point de vue de la norme $\|.\|_2$.

Lemme 4.8. *Si μ est une mesure borélienne finie sur G, pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\|\mu_N\|_2^2 \ll \sum_{\|\lambda\| \leqslant N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 + O_\epsilon(1).$$

Démonstration. On écrit, par la formule de Parseval,

$$\begin{aligned}\|\mu_N\|_2^2 &= \sum_\lambda (\dim V_\lambda)\|\widehat{\mu_N}(\lambda)\|_{HS}^2 \\ &\leqslant \sum_{\|\lambda\| \leqslant N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\widehat{\tau_N}(\lambda)\|_{HS}^2 + \sum_{\|\lambda\| > N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\widehat{\tau_N}(\lambda)\|_{HS}^2 \\ &\leqslant \sum_{\|\lambda\| \leqslant N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 + \sum_{\|\lambda\| > N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\widehat{\tau_N}(\lambda)\|_{HS}^2 \\ &\leqslant \sum_{\|\lambda\| \leqslant N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda)\|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 + O_\epsilon(1),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Il nous est maintenant possible d'obtenir un analogue continu à l'inégalité de convolution de Babai-Nikolov-Pyber.

Proposition 4.9 (Inégalité de convolution)**.** *Soit G un groupe de Lie réel semisimple compact, et α_0 tel que, pour toute représentation irréductible de G, on ait $\dim V_\lambda \geqslant \|\lambda\|^{d-\alpha_0}$. Soit μ et ν sont deux mesures boréliennes finies sur G et $\mu_N = \mu * \tau_N$ et $\nu_N = \nu * \tau_N$ leurs régularisées. Si μ_N et ν_N vérifient, uniformément en N :*

$$\|\mu_N\|_2^2 \ll N^{d-\alpha} \text{ et } \|\nu_N\|_2^2 \ll N^{d-\beta}$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$, uniformément en N,

$$\|(\mu * \nu)_N\|_2^2 \ll_\epsilon N^{d+\alpha_0-\alpha-\beta+\epsilon} + 1.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha < \beta$ et $\beta > \alpha_0$. D'après le lemme précédent, pour $\epsilon > 0$,

$$\|(\mu * \nu)_N\|_2^2 \ll_\epsilon \sum_{\|\lambda\| \leqslant N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda) \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \|\hat{\nu}(\lambda)\|_{HS}^2.$$

Pour majorer cette dernière quantité, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{\|\lambda\| \leqslant n} (\dim V_\lambda) \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2.$$

D'après les hypothèses,

$$A_n \ll \|\mu_n\|_2^2 \ll n^{d-\alpha}$$

et aussi

$$\|\hat{\nu}(\lambda)\|_{HS}^2 \ll \|\lambda\|^{\alpha_0-\beta}.$$

Ensuite, c'est toujours le même calcul qui permet de montrer l'inégalité souhaitée :

$$\begin{aligned}
\|(\mu * \nu)_N\|^2 &\ll_\epsilon \sum_{\|\lambda\| \leqslant N^{1+\epsilon}} (\dim V_\lambda) \|\hat{\mu}(\lambda)\|_{HS}^2 \|\lambda\|^{\alpha_0-\beta} \\
&\ll_\epsilon \sum_{n \leqslant N^{1+\epsilon}} (A_n - A_{n-1}) n^{\alpha_0-\beta} \\
&= A_N N^{\alpha_0-\beta} + \sum_{n \leqslant N^{1+\epsilon}-1} A_n (n^{\alpha_0-\beta} - (n+1)^{\alpha_0-\beta}) \\
&\ll_\epsilon N^{d+\alpha_0-\alpha-\beta+\epsilon} + \sum_{n \leqslant N^{1+\epsilon}-1} n^{d+\alpha_0-\alpha-\beta-1} \\
&\ll_\epsilon N^{d+\alpha_0-\alpha-\beta+\epsilon} + 1.
\end{aligned}$$

□

L'inégalité de convolution implique une minoration de la dimension d'un ensemble produit AB de deux parties boréliennes A et B de G.

Corollaire 4.10 (Inégalité dimensionnelle)**.** *Soit G un groupe de Lie réel semisimple compact, et α_0 tel que, pour toute représentation irréductible de G, on ait $\dim V_\lambda \geqslant \|\lambda\|^{d-\alpha_0}$. Si A et B sont deux parties boréliennes de G, alors*

$$\dim_H AB \geqslant \min\{d, \dim_H A + \dim_H B - \alpha_0\}.$$

La démonstration de cette inégalité utilise le lemme suivant, tiré de [4].

Lemme 4.11. *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur G dont le support est inclus dans un ensemble A de dimension de Hausdorff inférieure à α. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une infinité de N tels que*

$$\|\mu_N\|_2^2 \geqslant N^{d-\alpha-\epsilon}.$$

Démonstration. Comme A est de dimension de Hausdorff inférieure à α, on peut écrire, pour k_0 arbitrairement grand :

$$A \subset \bigcup_{k \geqslant k_0} \bigcup_{x \in E_k} B(x, 2^{-k})$$

où chaque E_k est un ensemble 2^{-k} séparé de cardinal inférieur à $2^{\alpha k}$. On a alors

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(A) \\ &\ll \sum_{k \geqslant k_0} \sum_{x \in E_k} \mu(B(x, 2^{-k})) \\ &\ll \sum_{k \geqslant k_0} 2^{\frac{\alpha k}{2}} \left(\sum_{x \in E_k} \mu(B(x, 2^{-k}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc il existe $k \geqslant k_0$ tel que

$$2^{\frac{\alpha k}{2}} \left(\sum_{x \in E_k} \mu(B(x, 2^{-k}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant k^{-2}$$

d'où

$$\sum_{x \in E_k} \mu(B(x, 2^{-k}))^2 \gg k^{-4} 2^{-\alpha k} \gg 2^{(-\alpha - \epsilon)k}.$$

On choisit alors $N = 2^k$; comme E_k est 2^{-k}-séparé (c'est-à-dire $\frac{1}{N}$-séparé), on trouve

$$\begin{aligned} \|\mu_N\|_2^2 &\gg N^d \sum_{x \in E_k} \mu(B(x, \frac{1}{N}))^2 \\ &\gg N^{d - \alpha - \epsilon}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. □

Démonstration de l'inégalité dimensionnelle 4.10. On note α et β les dimensions de Hausdorff respectives de A et B. Par le théorème de Frostman on choisit une mesure μ à support compact inclus dans A et qui soit $(\alpha - \epsilon)$-hölderienne et une mesure ν à support compact inclus dans B et qui soit $(\beta - \epsilon)$-hölderienne. Alors,

$$\|\mu_N\|_2^2 \ll N^{d - \alpha + \epsilon} \text{ et } \|\nu_N\|_2^2 \ll N^{d - \beta + \epsilon}$$

et on peut donc utiliser l'inégalité de convolution :

$$\|(\mu * \nu)_N\|_2^2 \ll_\epsilon N^{d + \alpha_0 - \alpha - \beta + 3\epsilon} + 1.$$

Grâce au lemme précédent appliqué à $\mu * \nu$, on peut en déduire que le support de $\mu * \nu$ (et donc AB) est de dimension de Hausdorff supérieure à $\min\{1, \alpha + \beta - \alpha_0 - 4\epsilon\}$, puis, comme ϵ est arbitrairement proche de zéro,

$$\dim_H AB \geqslant \min\{d, \alpha + \beta - \alpha_0\}.$$

□

5 Le cas p-adique

Si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique semisimple défini sur $\mathbb{Z}$, et $G = \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$ l'ensemble de ses points sur l'anneau des entiers p-adiques, on peut adapter les méthodes développées précédemment dans le cadre réel, pour étudier les sous-groupes boréliens de G. Dans un premier temps, il faut minorer la dimension d'une représentation complexe irréductible de G (c'est cela que nous ne ferons que pour $G = SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$) et dans un deuxième, utiliser l'analyse de Fourier sur G pour étudier les mesures hölderiennes. Ici encore, on autorise les constantes de la notation de Vinogradov à dépendre du groupe G et de la mesure considérée.

5.1 Représentations linéaires complexes de $SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$

Ici, $G = SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$ est l'ensemble des points entiers p-adiques du groupe spécial linéaire SL_{r+1}. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $G_n = SL_{r+1}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Une représentation irréductible unitaire π de G a pour image un sous-groupe compact (donc fermé) de $GL_k(\mathbb{C})$. Par le théorème de Cartan (cf. [3], III, §8, n° 2, théorème 2), $\pi(G)$ est donc un sous-groupe de Lie de $GL_k(\mathbb{C})$. Sa dimension est nécessairement égale à 0, sans quoi on aurait, en passant au quotient, un homéomorphisme entre une variété p-adique et une variété réelle. Comme $\pi(G)$ est aussi compact, c'est un sous-groupe fini de $GL_k(\mathbb{C})$, et $\ker \pi$ est un sous-groupe ouvert de G. En particulier, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $\ker \pi$ contient le sous-groupe de congruence associé à la projection $G \to G_n$, et π provient donc d'une représentation de G_n.
Ce sont maintenant les propriétés quasi-aléatoires des groupes G_n qui vont nous permettre d'établir une minoration de la dimension d'une représentation irréductible unitaire de G. Le cas $r = 1$ du lemme suivant apparaît déjà dans Bourgain-Gamburd [7] (lemma 7.1).

Lemme 5.1. *Si π est une représentation de G_n, qui ne provient pas d'une représentation de G_{n-1}, alors*

$$p^{rn} \ll \dim V_\pi.$$

Démonstration. Notons U le sous-groupe de G_n défini par

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & a_r \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a_i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right\}$$

et $N(U)$ le normalisateur de U, que l'on peut décrire par une écriture des matrices par blocs :

$$N(U) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (\det A)^{-1} \end{pmatrix} ; A \in GL_r(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \right\}.$$

Le groupe U est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^r$, donc les caractères de U sont de la forme

$$(a_1, \dots, a_r) \mapsto \omega^{\sum t_i a_i}$$

où ω est une racine p^n-ème de l'identité et les t_i sont dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. En particulier, $\hat{U}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^r$. Par ailleurs, $N(U)$ est isomorphe à $GL_r(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et, avec ces identifications, l'action de $N(U)$ par conjugaison sur $\hat{U}$ est l'action standard, multipliée par le déterminant. On décompose V_π en espaces propres de U :

$$V_\pi = \bigoplus V_\chi.$$

Si tous les caractères qui apparaissent dans cette décomposition ont toutes leurs cordonnées (t_i) divisibles par p, alors $\ker \pi$ contient l'ensemble des éléments de U dont toutes les coordonnées sont divisibles par p^{n-1}. Mais $\ker \pi$ est stable par conjugaison et donc $\ker \pi$ contient toutes les matrices dont la projection modulo p^{n-1} est triviale (cf. lemme suivant). Cela contredit l'hypothèse « π ne provient pas d'une représentation de G_{n-1} ».
Ainsi, il existe un caractère χ_0 dont les coordonées ne sont pas toutes divisibles par p, et alors, l'action de $N(U)$ permet d'obtenir, dans l'orbite de χ_0, tous les caractères correspondant à des vecteurs t' non divisibles par p. (En effet, l'action de $GL_r(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sur l'ensemble T_r des vecteurs de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^r$ non divisibles par p est transitive : si $x_0 \in T_r$, en multipliant par une matrice scalaire, on peut supposer que x_0 a une coordonnée égale à 1, en multipliant par une matrice de permutation, on peut supposer que la première coordonnée de x_0 est égale à 1, puis, en multipliant par des transvections on obtient le vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$, dont l'orbite est donc égale à T_r tout entier.) On trouve ainsi $p^{rn} - p^{r(n-1)}$ espaces propres non triviaux pour U et par conséquent, la dimension de V_π est au moins $p^{rn} - p^{r(n-1)} \geqslant \frac{p^{rn}}{2}$. (Si $r = 1$ il faut encore ajouter un facteur $\frac{1}{2}$ car $N(U)$ n'agit que par la multiplication par un carré.)

□

Pour terminer la démonstration du lemme 5.1, il reste à démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.2. *Tout sous-groupe distingué H de G_n contenant tous les éléments de U divisibles par p^{n-1} contient le noyau H_{n-1} de la projection modulo p^{n-1}.*

Démonstration. Commençons par remarquer que H_{n-1} est constitué de l'ensemble des éléments g de G_n qui s'écrivent $g = I + p^{n-1}x$ avec $x \in \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Ensuite, notons C l'ensemble des matrices y de $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telles que $h = I + p^{n-1}y \in H$; on veut donc montrer que $C = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Par hypothèse, C contient une matrice nilpotente de rang 1, et comme C est stable par conjugaison (H est distingué), C contient toutes les matrices E_{ij} $i \neq j$. Comme C est aussi stable par addition (H est un sous-groupe), C contient aussi toutes les matrices $E_{ij} - E_{ji}$ pour $i \neq j$. Ces dernières sont conjuguées aux $E_{ii} - E_{jj}$, $i \neq j$ qui sont donc aussi dans C. Ainsi, C contient une base de l'ensemble des matrices de trace nulle, puis, comme C est stable par addition, $C = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ce qu'on voulait. □

5.2 Mesures hölderiennes et coefficients de Fourier

Ici $G = \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$ est le groupe des points entiers p-adiques d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Z}$. On note d la dimension de G. On peut établir l'exact analogue du lemme 4.1.

Lemme 5.3. *Si μ est une mesure de probabilité sur G et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors,*

$$\sum_{\pi \in \widehat{G_n}} (\dim V_\pi) \|\hat{\mu}(\pi)\|_{HS}^2 \ll p^{n \dim G} . (\mu * \tilde{\mu})(B_{p^{-n}}).$$

En particulier, si μ est α-hölderienne, alors, pour toute représentation π de G_n,

$$\sum_{\pi \in \widehat{G_n}} (\dim V_\pi) \|\hat{\mu}(\pi)\|_{HS}^2 \ll p^{(d-\alpha)n}.$$

Démonstration. Il s'agit simplement d'adapter la démonstration du lemme 4.1. Soit χ_n la fonction indicatrice de la boule de G de centre 1 et de rayon p^{-n} et $f_n = \frac{1}{\int_G \chi_n} \chi_n$. Remarquons que :

- $\int_G f_n = 1$
- $f_n * f_n = f_n$ (par la propriété ultramétrique de G)
- f_n est invariante par inverse et par conjugaison
- $f_n \ll p^{n \dim G} \chi_n$

Toujours grâce à la dernière propriété de f_n, on a :

$$(\mu * \tilde{\mu})(f_n) \ll p^{n \dim G} . (\mu * \tilde{\mu})(B_{p^{-n}}).$$

Ensuite, comme dans le cas réel, et en utilisant la deuxième propriété de f_n,

$$(\mu * \tilde{\mu})(f_n) = \sum_{\pi \in \hat{G}} (\dim V_\pi) \|\widehat{f_n}(\pi) \hat{\mu}(\pi)\|_{HS}^2,$$

et donc

$$\sum_{\pi \in \widehat{G_n}} (\dim V_\pi) \|\widehat{f_n}(\pi) \hat{\mu}(\pi)\|_{HS}^2 \leqslant (\mu * \tilde{\mu})(f_n).$$

Enfin, comme le support de f_n est inclus dans $B(1, p^{-n})$, et comme toutes les représentations de G_n sont triviales sur cette boule, on a pour chaque $\pi \in \widehat{G_n}$, $\hat{f_n}(\pi) = id$ d'où

$$\sum_{\pi \in \widehat{G_n}} (\dim V_\pi) \|\hat{\mu}(\pi)\|_{HS}^2 \leqslant (\mu * \tilde{\mu})(f_n),$$

ce qu'on voulait. □

Remarque : En fait, on a

$$\widehat{f_n}(\pi) = \begin{cases} id & \text{si } \pi \in \widehat{G_n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

si bien que les deux dernières inégalités de la preuve sont en fait des égalités.

Supposons maintenant qu'il existe $\alpha_0 < d$ tel que, si π est une représentation de G qui ne provient pas de G_n (n-ième sous-groupe de congruence),

$$\dim V_\pi \gg p^{(d-\alpha_0)n}. \tag{1}$$

D'après la partie précédente, $SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$ vérifie cette propriété, avec $\alpha_0 = d - r$. La version quantitative du théorème 1.6 est alors comme suit :

Théorème 5.4. *On suppose que G satisfait (1). Si μ est une mesure borélienne finie α-hölderienne sur G, avec $\alpha > \alpha_0$, alors, μ^{*k} est absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur G dès que $k > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$.*

Démonstration. Comme dans le cas réel, si μ est une mesure borélienne finie α-hölderienne sur G, avec $\alpha > \alpha_0$, on écrit, grâce au lemme 5.3, pour tout entier n,

$$A_n = \sum_{\pi \in \widehat{G_n}} (\dim V_\pi) \|\hat{\mu}(\pi)\|_{HS}^2 \ll p^{(d-\alpha)n}.$$

Cela, avec l'hypothèse (1), montre que si π est une représentation de G_n qui ne provient pas de G_{n-1} et si $k \geqslant 2$, alors

$$\|\hat{\mu}(\pi)\|_{HS}^{2(k-1)} \ll p^{n(k-1)(\alpha_0-\alpha)}.$$

On poursuit en écrivant

$$\begin{aligned}\sum_{\pi \in \widehat{G_N}} (\dim V_\pi) \|\widehat{\mu^{*k}}(\pi)\|_{HS}^2 &\ll \sum_{n \leqslant N} (A_n - A_{n-1}) p^{n(k-1)(\alpha_0-\alpha)} \\ &\ll A_N p^{N(k-1)(\alpha_0-\alpha)} \\ &\qquad + \sum_{n \leqslant N-1} A_n p^{n(k-1)(\alpha_0-\alpha)} (1 - p^{(k-1)(\alpha_0-\alpha)}) \\ &\ll p^{N(d-\alpha_0-k(\alpha-\alpha_0))} + 1\end{aligned}$$

ce qui montre que la somme converge dès que $k > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$. Dans ce cas, par le théorème de Peter-Weyl, μ^{*k} est dans L^2 et est donc en particulier absolument continue par rapport à la mesure de Haar. □

Le passage des mesures aux ensembles se fait exactement comme dans le cas réel, en utilisant le théorème de Frostman, valable dans n'importe quel espace métrique (cf. [18], theorem 8.17). On obtient :

Corollaire 5.5. *Si A est une partie borélienne de G de dimension de Hausdorff strictement supérieure à α_0, alors, pour $l > \frac{d-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}$, alors A^l est de mesure de Haar positive. En particulier, pour un certain m, A^m est un sous-groupe ouvert de G.*

Et donc :

Corollaire 5.6 (Trou dimensionnel)**.** *Les seuls sous-groupes boréliens de G de dimension de Hausdorff strictement supérieure à α_0 sont les sous-groupes ouverts de G.*

Contrairement à ce qui se passe dans le cas réel, la valeur de α_0 obtenue ici est optimale, au moins dans le cas $G = SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$. En effet, un sous-groupe parabolique maximal $SL_{r+1}(\mathbb{Z}_p)$ est de dimension $d - r$.

En reproduisant les preuves du cas réel, on obtient aussi l'inégalité de convolution et l'inégalité dimensionnelle ; on choisit pour suite d'unités approchées τ_N la suite des fonctions indicatrices des boules de rayon p^{-N}, et si μ est une mesure hölderienne, on étudie ses régularisées $\mu * \tau_N$. La preuve est même un peu plus simple que dans le cas réel, car si π est une représentation qui ne provient pas de G_N, alors, par orthogonalité des caractères, $\widehat{\tau_N}(\pi) = 0$. On omet les détails.

Proposition 5.7 (Inégalité de convolution)**.** *Si μ et ν sont deux mesures boréliennes finies sur G vérifiant*

$$\|\mu_N\|_2^2 \ll p^{N(d-\alpha)} \text{ et } \|\nu_N\|_2^2 \ll p^{N(d-\beta)}$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\|(\mu * \nu)_N\|_2^2 \ll_\epsilon p^{N(d+\alpha_0-\alpha-\beta+\epsilon)} + 1.$$

Corollaire 5.8 (Inégalité dimensionnelle)**.** *Si A et B sont deux parties boréliennes de G, alors*

$$\dim_H AB \geqslant \min\{d, \dim_H A + \dim_H B - \alpha_0\}.$$

Annexe : tableau de valeurs

Δ	$\dim G$	p	α_0
A_n	$n(n+2)$	$n(n-1)$	$n(n+1)$
B_n	$2n^2+n$	$2(n-1)^2$	$2n^2-n+1$
C_n	$2n^2+n$	$2(n-1)^2$	$2n^2-n+1$
D_n	$n(2n-1)$	$2(n-1)(n-2)$	$2n^2-3n+2$
E_6	78	40	62
E_7	133	72	106
E_8	248	126	191
F_4	52	18	37
G_2	14	2	9

FIGURE 1 – Valeurs numériques de $\dim G$, p et α_0 selon le diagramme de racines

Références

[1] A.G. Abercrombie. Subgroups and subrings of profinite rings. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 116 :209–222, 1994.

[2] L. Babai, N. Nikolov, and L. Pyber. Expansion and product decompositions in finite groups : variations on a theme of gowers. 2007.

[3] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*. Masson, 1982.

[4] J. Bourgain. On the Erdős-Volkmann and Katz-Tao ring conjectures. *GAFA*, 13, 2003.

[5] J. Bourgain. Mordell's exponential sum revisited. *Journal of the American Mathematical Society*, 18 :477–499, 2005.

[6] J. Bourgain. The discretized sum-product and projection theorems. *Journal d'Analyse Mathématique*, 112 :193–236, 2010.

[7] J. Bourgain and A. Gamburd. Expansion and random walks in $SL_d(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. *Journal of the European Mathematical Society*, 10 :987–1011, 2008.

[8] J. Bourgain and A. Gamburd. On the spectral gap for finitely generated subgroups of $SU(2)$. *Inventiones Mathematicae*, 171 :83–121, 2008.

[9] J. Bourgain and A. Gamburd. Uniform expansion bounds for Cayley graphs of $SL_2(\mathbb{F}_p)$. *Annals of Mathematics*, 167 :625–642, 2008.

[10] E. Breuillard. *Lectures on Approximate Groups*. Notes d'un cours fait à l'I.H.P., 2010.

[11] G.A. Edgar and C. Miller. Borel subrings of the reals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131 :1121–1129, 2003.

[12] P. Erdős and K.J. Volkmann. Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension. *J.Reine Angew. Math*, 221 :203–208, 1966.

[13] K.J. Falconer. Rings of fractional dimension. *Mathematika*, 31 :25–27, 1984.

[14] K.J. Falconer. *Geometry of Fractals*. Wiley, 2003.

[15] W.T. Gowers. Quasirandom groups. *Combinatorics Probability and Computing*, 17, 2008.

[16] A. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction, Second Edition*. Birkhäuser, 2002.

[17] J.-F Le Gall. Intégration, probabilités et processus aléatoires. *Notes d'un cours fait à l'E.N.S.*, 2006.

[18] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge university press, 1995.

[19] P. Sarnak and X. Xue. Bounds for multiplicities of automorphic representations. *Duke Mathematical Journal*, 64 :207–227, 1991.

[20] N. de Saxcé. Subgroups of fractional dimension in nilpotent of solvable lie groups. *preprint*, 2012.

[21] A. Weil. *L'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann, 1940.