Approximation diophantienne sur la grassmannienne

Nicolas de Saxcé

13 juin 2022

Résumé

Nous étudions l'approximation diophantienne intrinsèque dans la variété grassmannienne des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$. Grâce à une nouvelle correspondance entre les propriétés diophantiennes d'un sous-espace x dans $\mathbb{R}^d$ et certaines orbites diagonales dans l'espace des réseaux, nous donnons quelques éléments de réponse à plusieurs questions posées par Schmidt en 1967.

Table des matières

Introduction

À l'origine, l'approximation diophantienne consiste en l'étude des approximations rationnelles $\frac{p}{q}$ à un nombre réel θ donné. De façon équivalente, dans l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, on cherche à approcher une droite irrationnelle x de coordonnées homogènes $[1 : \theta]$ par une droite rationnelle $v = [p : q]$. Ainsi par exemple, si l'on note $d(x, v)$ la distance usuelle sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et $H(v) = \max(|p|, |q|)$ la hauteur du point rationnel v, le célèbre théorème de Dirichlet [8] implique que pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ irrationnel, l'inégalité

$$d(x, v) \leq H(v)^{-2}$$

admet une infinité de solutions $v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que la droite $x = [1 : \sqrt{2}]$ vérifie, pour un certain $c > 0$, pour tout $v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, $d(x, v) \geq cH(v)^{-2}$, et cela montre que l'exposant 2 est optimal.

En dimension supérieure, il existe différentes façons de généraliser le problème. Par exemple, étant donnée une droite réelle $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, on peut étudier les approximations de x par des droites rationnelles (on parle alors d'approximation simultanée) ou bien chercher à comprendre les hyperplans rationnels proches de x (on parle alors d'approximation par des formes linéaires). Dans un article fondateur [24], Schmidt a proposé la question générale suivante pour placer ces différents problèmes dans un cadre géométrique naturel :

Fixons des entiers d, k et ℓ tels que $d \geq 2$ et $0 < k, \ell < d$. Étant donné un sous-espace x de dimension ℓ dans $\mathbb{R}^d$, étudier les sous-espaces rationnels v de dimension k proches de x.

Admettant momentanément que les notions de distance et de hauteur sur la variété grassmannienne sont bien définies, on peut résumer en trois points les problèmes que nous voulons étudier ici, suggérés par Schmidt à la fin de son article [24, §16].

(A) *Principe de Dirichlet :* Déterminer la borne supérieure des $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, l'inégalité $d(x, v) \leq H(v)^{-\beta}$ admette des solutions $v \in X_k(\mathbb{Q})$ arbitrairement proches de x.

(B) *Analogue du théorème de Roth :* Calculer les exposants diophantiens $\beta_k(x)$ (définis ci-dessous) d'un sous-espace x qui admet une base de vecteurs à coordonnées dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

(C) *Théorie métrique :* Étudier les propriétés diophantiennes d'un point x choisi aléatoirement dans $X_\ell(\mathbb{R})$.

Pour mener à bien ce programme, nous utiliserons une correspondance entre les propriétés diophantiennes d'un point $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ et le comportement asymptotique d'une orbite diagonale bien choisie dans l'espace des réseaux. Mais tout d'abord, nous devons préciser quelques définitions.

Dans toute la suite, les entiers d, k et ℓ sont fixés, et satisfont $0 < k, \ell < d$. On note $X_\ell = \mathrm{Grass}(\ell, d)$ la variété grassmannienne des sous-espaces de dimension ℓ dans $\mathbb{R}^d$, et de même, $X_k = \mathrm{Grass}(k, d)$. Les points rationnels de ces variétés, i.e. les sous-espaces définis sur $\mathbb{Q}$, sont notés $X_\ell(\mathbb{Q})$ et $X_k(\mathbb{Q})$, respectivement.

Exposants diophantiens d'un sous-espace vectoriel

Pour mesurer la qualité d'une approximation rationnelle à un sous-espace réel, nous devons en premier lieu définir la *distance* utilisée sur la variété grassmannienne. Pour cette définition, on utilise momentanément une notation un peu encombrante en notant en exposant la dimension d'un sous-espace : x^1 est une droite, y^2 un plan, etc. Lorsque $x = x^1$ et $y = y^1$ sont des droites, la distance utilisée est la distance usuelle sur l'espace projectif, donnée par la formule

$$d(x^1, y^1) = \sin \measuredangle(x^1, y^1) = \frac{\|u_x \wedge u_y\|}{\|u_x\| \|u_y\|}$$

où u_x et u_y sont des vecteurs non nuls portés par x et y, respectivement. Ensuite, si $x = x^1$ est une droite et $y = y^k$ un sous-espace de dimension k, on pose

$$d(x^1, y^k) = \min\{d(x^1, y^1) \ ; \ y^1 \subset y^k\}$$

Enfin, en général, si $x = x^\ell$ est de dimension ℓ et $y = y^k$ de dimension k,

$$d(x^\ell, y^k) = \begin{cases} \max_{x^1 \in x^\ell} d(x^1, y^k) & \text{si } \ell \leq k \\ \max_{y^1 \in y^k} d(y^1, x^\ell) & \text{si } k \geq \ell \end{cases}$$

Remarque. Si $\dim x = \dim y = \ell$, cela définit bien une distance sur $X_\ell(\mathbb{R})$, équivalente à une distance riemannienne. En général, l'égalité $d(x, y) = 0$ équivaut seulement à dire que x et y sont comparables, i.e. $x \subset y$ ou $y \subset x$.

Nous aurons aussi besoin d'une *hauteur* sur les sous-espaces rationnels. Si $v \in X_k(\mathbb{Q})$, on choisit une base $(v_i)_{1 \leq i \leq k}$ de v constituée d'éléments de $\mathbb{Z}^d$ sans diviseur commun et on pose

$$H(v) = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\|$$

où la norme sur la puissance extérieure $\wedge^k \mathbb{R}^d$ est la norme euclidienne usuelle. D'ailleurs, le choix d'une autre norme pourrait aussi convenir, car la nouvelle hauteur ainsi obtenue serait comparable à H à une constante multiplicative près, et les propriétés que nous étudierons dans cette article ne seraient pas affectées par ce changement.

La distance et la hauteur définies ci-dessus permettent d'associer à tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ une famille d'exposants diophantiens de la façon suivante.

Définition (Exposants diophantiens)**.** Pour $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ et $k = 1, \ldots, d-1$, on définit l'*exposant diophantien de* x pour l'approximation par des sous-espaces rationnels de dimension k par

$$\beta_k(x) = \inf\{\beta > 0 \mid \exists c > 0 : \forall v \in X_k(\mathbb{Q}),\, d(v, x) \geq cH(v)^{-\beta}\}.$$

Pour calculer l'exposant diophantien $\beta_k(x)$, on peut toujours se ramener au cas $k \leq \ell$, car pour tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ et $v \in X_k(\mathbb{R})$, $d(x, v) = d(x^\perp, v^\perp)$ et donc

$$\beta_k(x) = \beta_{d-k}(x^\perp). \tag{1}$$

Par conséquent, sauf mention explicite du contraire, nous supposerons toujours dans la suite $k \leq \ell$, ce qui simplifie un peu certaines formules[1].

Résultats principaux

D'après Schmidt [24, Theorem 3], le nombre $N_{X_k}(H)$ de points v dans $X_k(\mathbb{Q})$ de hauteur inférieure à H vérifie

$$N_{X_k}(H) \asymp_{H \to \infty} H^d. \tag{2}$$

Or, pour chaque $v \in X_k$, l'inégalité $d(x, v) \leq r$ définit dans $X_\ell(\mathbb{R})$ un voisinage de taille r d'une sous-variété de codimension $k(d-\ell)$. Le volume d'un tel voisinage est de l'ordre de $r^{k(d-\ell)}$, et l'on peut s'attendre à ce que la réunion de ces voisinages pour les points v de hauteur au plus H soit de mesure environ égale à $H^d r^{k(d-\ell)}$, tout au moins si $r \ll H^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}$. Si l'on prend $r = H^{-\beta}$, ce calcul met en évidence la valeur critique $\beta = \frac{d}{k(d-\ell)}$.

1. Cette convention diffère de celle de Schmidt, qui restreint plutôt son étude suivant la condition $k + \ell \leq d$. Il est facile de transcrire les résultats d'un cadre à l'autre à l'aide de (1).

Le résultat principal de cet article est que cette valeur critique est en fait une minoration uniforme de $\beta_k(x)$ pour *tous* les points $x \in X_\ell(\mathbb{R})$. Il n'est pas difficile de voir que cette borne est optimale, soit en considérant un point x choisi aléatoirement suivant la mesure de Lebesgue, soit en construisant un exemple explicite à l'aide de corps de nombres, comme dans [24, Theorem 15]. Lorsque k ou ℓ est égal à 1 ou $d-1$, ce résultat n'est autre que le célèbre principe de Dirichlet [8]. Mais en général, les minorations obtenues par Schmidt [24, Theorem 12] et même les améliorations très récentes dues à Elio Joseph [13] ne sont optimales que si d, k et ℓ satisfont l'inégalité très contraignante $d \geq \min(k,\ell)(d-\max(k,\ell))$.

Théorème 1 (Principe de Dirichlet pour la grassmannienne)**.** *Pour tout x dans $X_\ell(\mathbb{R})$, et tout $k \in [\![1,\ell]\!]$, $\beta_k(x) \geq \frac{d}{k(d-\ell)}$. Cette minoration est optimale, car si x est choisi aléatoirement suivant la mesure de Lebesgue sur $X_\ell(\mathbb{R})$, l'égalité a lieu presque sûrement.*

Lorsque le sous-espace x est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, nous donnerons même une formule explicite pour les exposants diophantiens de x, qui dépend des dimensions des intersections de x avec un sous-espace rationnel de $\mathbb{R}^d$. On renvoie au théorème 8 pour l'énoncé précis de la formule, qui implique le résultat suivant, analogue au célèbre théorème de Roth sur l'approximation des nombres algébriques par des rationnels. On rappelle qu'un *pinceau* dans X_ℓ est une sous-variété de la forme

$$\mathcal{P}_{W,r} = \{x \in X_\ell \mid \dim x \cap W \geq r\}$$

pour W un sous-espace dans $\mathbb{R}^d$ et $r \in [\![0,d]\!]$, et que le pinceau est dit *rationnel* si W est défini sur $\mathbb{Q}$, et *contraignant* si $\frac{r}{\dim W} > \frac{\ell}{d}$.

Théorème 2 (Théorème de Roth pour la grassmannienne)**.** *Soit $x \in X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$. Si x n'appartient à aucun pinceau rationnel contraignant, alors pour tout $k \in [\![1,d-1]\!]$, $\beta_k(x) = \frac{d}{k(d-\ell)}$. Réciproquement, si x appartient à un pinceau rationnel contraignant, alors pour tout $k = 1,\ldots,d-1$, $\beta_k(x) > \frac{d}{k(d-\ell)}$.*

En ce qui concerne l'approximation diophantienne métrique, nous démontrerons d'abord une généralisation du théorème de Khintchine.

Théorème 3 (Théorème de Khintchine pour la grassmannienne)**.** *Soit $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante. Pour $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ et $v \in X_k(\mathbb{Q})$, on s'intéresse à l'inégalité*

$$d(x,v) \leq H(v)^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}\psi(H(v)). \tag{3}$$

(i) Si $\int_1^{+\infty} \psi(u)^{k(d-\ell)} \frac{\mathrm{d}u}{u} < +\infty$, alors, pour presque tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, l'inégalité (3) n'a qu'un nombre fini de solutions $v \in X_k(\mathbb{Q})$.

(ii) Si $\int_1^{+\infty} \psi(u)^{k(d-\ell)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = +\infty$, alors, pour presque tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, l'inégalité (3) admet une infinité de solutions $v \in X_k(\mathbb{Q})$.

Puis nous démontrerons une formule, analogue à celle du théorème de Jarník, pour la dimension de Hausdorff de l'ensemble $W_{k,\ell}(\tau)$ des sous-espaces $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ dont l'exposant diophantien $\beta_k(x)$ est supérieur à un réel τ donné.

Théorème 4 (Théorème de Jarník pour la grassmannienne)**.** *Soient des entiers $1 \leq k \leq \ell < d$. Pour $\tau \geq \frac{d}{k(d-\ell)}$,*

$$\dim_H W_{k,\ell}(\tau) = (\ell-k)(d-\ell) + \frac{d}{\tau}$$

Enfin, nous étudierons les exposants diophantiens d'un point x choisi aléatoirement sur une sous-variété analytique de $X_\ell(\mathbb{R})$ et montrerons le résultat suivant, inspiré des travaux de Kleinbock et Margulis [16] et de Kleinbock [18].

Théorème 5 (Approximation sur une sous-variété analytique)**.** *Soit $M \subset X_\ell(\mathbb{R})$ une sous-variété analytique connexe.*

1. *Pour chaque $k = 1, \dots, \ell$, il existe un exposant $\beta_k(M)$ tel que pour presque tout x dans M, $\beta_k(x) = \beta_k(M)$.*
2. *L'exposant $\beta_k(M)$ est déterminé par l'adhérence de Zariski de M.*
3. *Si M n'est incluse dans aucun pinceau contraignant, alors, pour tout $k = 1, \dots, \ell$, $\beta_k(M) = \frac{d}{k(d-\ell)}$.*

Lorsque l'adhérence de Zariski de M est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on peut donner une formule pour les exposants $\beta_k(M)$; on renvoie le lecteur à la partie 6 pour son énoncé précis.

Plan de l'article

Les démonstrations de tous les théorèmes énoncés ci-dessus sont basées sur une correspondance entre les propriétés diophantiennes du point $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ et le comportement asymptotique d'une orbite diagonale bien choisie dans l'espace de réseaux $\Omega = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$. L'énoncé précis de cette correspondance est donné à la proposition 1, et sa démonstration fait l'objet de la partie 1.

Dans la partie 2, nous appliquons cette correspondance et les résultats de [5] basés sur le théorème du sous-espace de Schmidt, pour calculer les exposants diophantiens $\beta_k(x)$, $k = 1, \dots, d-1$ d'un point $x \in X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$ arbitraire, et nous en déduisons le théorème 2.

Le but de la partie 3 est le théorème 1. La démonstration utilise encore la correspondance avec les orbites diagonales dans Ω, mais cette fois on ne dispose pas du théorème du sous-espace, et leur comportement asymptotique ne peut pas se décrire aussi simplement. Cela complique considérablement notre approche. Néanmoins, à l'aide d'outils inspirés de la *géométrie paramétrique des nombres* introduite récemment par Schmidt et Summerer [25], et développée en particulier par Roy [21] et par Das, Fishman, Simmons et Urbański [7], on parvient à décrire l'orbite suffisamment précisément pour conclure.

Les parties 4, 5 et 6 sont consacrées à l'approximation diophantienne métrique, on y démontre les théorèmes 3, 4 et 5, respectivement.

1 Orbites diagonales et exposant diophantien

Nous exposons maintenant les liens entre l'approximation diophantienne sur la variété grassmannienne X_ℓ et l'étude des orbites diagonales dans l'espace des réseaux de l'espace euclidien.

Le groupe algébrique $G = \mathrm{SL}_d$ agit transitivement sur la variété grassmannienne X_ℓ. Notons P le stabilisateur dans G du point base $x_0 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_\ell)$, i.e. l'ensemble des éléments de G dont la matrice dans la représentation standard est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $A \in M_\ell(\mathbb{R})$, $B \in M_{\ell,d-\ell}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{d-\ell}(\mathbb{R})$.

L'action de G permet d'identifier X_ℓ à la variété quotient $P\backslash G$ via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} P\backslash G & \mapsto & X_\ell \\ Pg & \mapsto & g^{-1}x_0 \end{array}$$

Le résultat essentiel de cette partie est une correspondance entre les propriétés diophantiennes d'un point $x = Ps_x$ dans $X_\ell(\mathbb{R})$ et le comportement asymptotique de l'orbite du réseau

$$\Delta_x = s_x \mathbb{Z}^d$$

sous le flot diagonal

$$a_t = \mathrm{diag}(\underbrace{e^{-\frac{t}{\ell}}, \dots, e^{-\frac{t}{\ell}}}_{\ell \text{ fois}}, \underbrace{e^{\frac{t}{d-\ell}}, \dots, e^{\frac{t}{d-\ell}}}_{d-\ell \text{ fois}}).$$

Comme auparavant, on suppose pour simplifier $k \leq \ell$. Les valeurs propres de a_t dans $\wedge^k \mathbb{R}^d$ sont alors

$$e^{-t\frac{k}{\ell}},\ e^{-t[\frac{k}{\ell}-(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]},\ e^{-t[\frac{k}{\ell}-2(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]},\ \dots,\ e^{-t[\frac{k}{\ell}-\min(k,d-\ell)(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]}.$$

Nous noterons $\pi^+ : \wedge^k \mathbb{R}^d \to \wedge^k \mathbb{R}^d$ la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $e^{-t\frac{k}{\ell}}$, parallèlement aux autres espaces propres de a_t. Notons enfin

$$C_+ = \{\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{R}^d \mid \|\pi_+(\mathbf{v})\| \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|\}$$

et posons

$$\gamma_k(x) = \inf\{\gamma \in \mathbb{R} \mid \exists c > 0 : \forall t > 0, \forall \mathbf{v} \in C_+ \cap \wedge^k a_t \Delta_x,\ \|\mathbf{v}\| \geq c e^{-\gamma t}\}.$$

Le résultat principal de cette partie est le théorème 6 ci-dessous, qui relie le taux de fuite $\gamma_k(x)$ de l'orbite diagonale dans l'espace des réseaux à l'exposant diophantien $\beta_k(x)$ pour l'approximation de x par des sous-espaces rationnels de dimension k. Dans le cas particulier où $k = 1$, cette correspondance a été abondamment utilisée depuis les travaux de Dani [6], en particulier par Kleinbock et Margulis [16, 17, 15]. La nouveauté ici est que nous étudions les réseaux dans $\wedge^k \mathbb{R}^d$ pour comprendre l'approximation par des sous-espaces de dimension k ; cela nécessite d'introduire le cône C_+ pour contrôler la direction des petits vecteurs.

Théorème 6 (Taux de fuite et exposant diophantien)**.** *Pour tout x dans $X_\ell(\mathbb{R})$,*

$$\beta_k(x) = \frac{d}{(k - \ell\gamma_k(x))(d-\ell)}.$$

Ce théorème est une conséquence facile de la proposition ci-dessous, qui donne une correspondance plus précise entre les bonnes approximations de x et les petits vecteurs dans l'orbite de réseaux $\wedge^k a_t \Delta_x$.

Proposition 1 (Correspondance de Dani pour la grassmannienne)**.** *Soit x dans $X_\ell(\mathbb{R})$ et $s_x \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ tel que $x = Ps_x$.*

1. *Soit $v \in X_k(\mathbb{Q})$ proche de x, et $t > 0$ tel que $e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})} = d(v,x)$. Le vecteur pur $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{Z}^d$ associé à v vérifie*

$$\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v})\| \gg \|a_t s_x \mathbf{v}\| \quad \textit{et} \quad \|a_t s_x \mathbf{v}\| \ll e^{-t\frac{k}{\ell}} H(v).$$

2. *Soit* $t > 0$ *et* $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{Z}^d$ *un vecteur pur tel que* $\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v})\| \gg \|a_t s_x \mathbf{v}\|$. *Le point rationnel* $v \in X_k(\mathbb{Q})$ *associé à* $\mathbf{v}$ *vérifie*

$$H(v) \ll e^{t\frac{k}{\ell}} \|a_t s_x \mathbf{v}\| \quad \textit{et} \quad d(v,x) \ll e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur deux lemmes. Le premier exprime la distance entre deux sous-espaces vectoriels en termes de vecteurs dans une puissance extérieure de $\mathbb{R}^d$. Pour un vecteur $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{R}^d$, nous noterons

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots$$

la décomposition selon les espaces propres de a_t, où pour $i = 0, \dots, \min(k, d-\ell)$, $\mathbf{v}_i$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $e^{-t(\frac{k}{\ell} - i(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell}))}$.

dist **Lemme 1.** *Soit* $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ *et* $s_x \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ *tel que* $x = Ps_x$. *À une constante multiplicative près qui dépend du choix de* s_x, *pour tout* $v \in X_k(\mathbb{R})$ *proche de* x, *si* $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{R}^d$ *est un représentant de* v *et* $\tilde{\mathbf{v}} = s_x \mathbf{v}$, *on a,*

$$d(v,x) \asymp \frac{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|}.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer cet équivalent lorsque $d(v,x) \leq c$, où $c > 0$ est une constante fixée. Quitte à composer par une isométrie de $\mathbb{R}^d$, on peut supposer que $x = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_\ell)$ et que la projection orthogonale de $\mathbf{v}$ sur $\wedge^k x$ est $\pi_x(\mathbf{v}) = e_1 \wedge \dots \wedge e_k$. On peut alors choisir une base $(u_i)_{1 \leq i \leq k}$ de v telle que pour $i = 1, \dots, k$,

$$u_i = e_i + \sum_{s > \ell} u_{i,s} e_s,$$

de sorte que

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_{\{1,\dots,k\}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_1 = \sum_{i,s} u_{i,s} \mathbf{e}_{\{1,\dots,k\} \cup \{s\} \setminus \{i\}}.$$

Comme s_x préserve le sous-espace $x = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_\ell)$, on doit avoir, pour chaque i, $\tilde{\mathbf{v}}_i = s_x \mathbf{v}_i$. Par suite,

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|} \asymp \frac{\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_0\|} \asymp \max_{i,s} |u_{i,s}|.$$

D'autre part,

$$d(v,x) = \max_{u \in v;\ \|u\|=1} \frac{\|u \wedge x\|}{\|u\|\|x\|} \asymp \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\|u_i \wedge x\|}{\|u_i\|\|x\|} \asymp \max_{i,s} |u_{i,s}|.$$

où la deuxième égalité provient du fait que la base (u_i) de v est presque orthonormée (les coefficients $u_{i,s}$ sont assez petits si l'on restreint v à un petit voisinage de x). □

L'énoncé du second lemme est un peu plus technique ; il permet de contrôler les composantes $\mathbf{v}_i$, $i \geq 2$ d'un vecteur pur $\mathbf{v}$ en termes des deux premières composantes $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_1$.

Lemme 2. *Si* $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{R}^d$ *est un vecteur pur, alors, pour tout* $r \geq 1$*,*

$$\|\mathbf{v}_0\|^{r-1}\|\mathbf{v}_r\| \ll \|\mathbf{v}_1\|^r.$$

Démonstration. La démonstration procède par récurrence sur r, en utilisant les relations de Grassmann [4, chapitre III, §13] (ou relations de Plücker). Pour $r = 1$ le résultat est trivial, et l'on suppose donc le résultat connu pour $r \geq 1$. Il s'agit de voir que si I est une partie de $[\![1, d]\!]$ à k éléments telle que $\operatorname{card} I \setminus [\![1, \ell]\!] = r+1$, alors $\|\mathbf{v}_0\|^r |\mathbf{v}_I| \ll \|\mathbf{v}_1\|^{r+1}$.

Soit $J_0 \subset [\![1, \ell]\!]$ une partie de cardinal k telle que $|\mathbf{v}_{J_0}| \asymp \|\mathbf{v}_0\|$ et $i_0 \in I \setminus [\![1, \ell]\!]$. La relation de Grassmann [4, équation (84-(J,H)), page 172, chapitre III] correspondant aux ensembles $H = I \setminus \{i_0\}$ et $J = J_0 \cup \{i_0\}$ s'écrit

$$\mathbf{v}_{J_0}\mathbf{v}_I = \sum_{j \in J_0 \setminus I} \pm \mathbf{v}_{J\setminus\{j\}}\mathbf{v}_{H\cup\{j\}}.$$

Pour chaque $j \in J_0 \setminus I$, on a $\operatorname{card}[\![1, \ell]\!] \cap J \setminus \{j\} = k-1$, et donc $|\mathbf{v}_{J\setminus\{j\}}| \leq \|\mathbf{v}_1\|$. De même, $\operatorname{card} H \cup \{j\} \setminus [\![1, \ell]\!] = r$, et donc $|\mathbf{v}_{H\cup\{j\}}| \leq \|\mathbf{v}_r\|$. Cela implique $|\mathbf{v}_{J_0}\mathbf{v}_I| \ll \|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_r\|$, d'où $\|\mathbf{v}_0\|\|\mathbf{v}_{r+1}\| \leq \|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_r\|$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure. □

Grâce aux deux lemmes ci-dessus, nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1.

Démonstration de la proposition 1. Soit $v \in X_k(\mathbb{Q})$ proche de x et $t > 0$ tel que

$$e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})} = d(v, x).$$

Soit $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{Z}^d$ un vecteur primitif représentant v et $\tilde{\mathbf{v}} = s_x\mathbf{v} \in \wedge^k \Delta_x$. Le k-vecteur pur $a_t\tilde{\mathbf{v}}$ se décompose suivant les espaces propres de a_t :

$$\begin{aligned} a_t\tilde{\mathbf{v}} &= a_t\tilde{\mathbf{v}}_0 + a_t\tilde{\mathbf{v}}_1 + \dots \\ &= e^{-t\frac{k}{\ell}}\tilde{\mathbf{v}}_0 + e^{-t[\frac{k}{\ell}-(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]}\tilde{\mathbf{v}}_1 + \dots \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 1, $\frac{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|} \asymp d(v, x)$ et donc, par notre choix du paramètre $t > 0$,

$$e^{-t[\frac{k}{\ell}-(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]}\|\tilde{\mathbf{v}}_1\| \ll e^{-t[\frac{k}{\ell}-(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]}\|\tilde{\mathbf{v}}_0\| d(v, x) \ll e^{-t\frac{k}{\ell}}\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|.$$

Par conséquent, $\frac{\|a_t\tilde{\mathbf{v}}_1\|}{\|a_t\tilde{\mathbf{v}}_0\|} \ll 1$, et par le lemme 2, pour tout $i \geq 1$, $\frac{\|a_t\tilde{\mathbf{v}}_i\|}{\|a_t\tilde{\mathbf{v}}_0\|} \ll 1$. Ainsi,

$$\frac{\|\pi_+(a_t\tilde{\mathbf{v}})\|}{\|a_t\tilde{\mathbf{v}}\|} \gg 1 \quad \text{et} \quad \|a_t\tilde{\mathbf{v}}\| \ll e^{-t\frac{k}{\ell}}H(v),$$

ce qui montre la première partie de la proposition.

Pour la seconde assertion, soit $t > 0$ et $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{Z}^d$ tels que $\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v})\| \gg \|a_t s_x \mathbf{v}\|$. Comme ci-dessus, posons $\tilde{\mathbf{v}} = s_x\mathbf{v}$. Notons que $\pi_+(a_t\tilde{\mathbf{v}}) = a_t\tilde{\mathbf{v}}_0 = e^{-t\frac{k}{\ell}}\tilde{\mathbf{v}}_0$ et donc, pour tout $i \geq 0$,

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_i\| \leq e^{t[\frac{k}{\ell}-i(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]}\|a_t\tilde{\mathbf{v}}\| \ll e^{-ti(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|.$$

Si $v \in X_k(\mathbb{Q})$ est le sous-espace représenté par $\mathbf{v}$, on trouve bien

$$H(v) = \|\mathbf{v}\| \asymp \|\tilde{\mathbf{v}}\| \ll \|\tilde{\mathbf{v}}_0\| \ll e^{t\frac{k}{\ell}}\|a_t\tilde{\mathbf{v}}\|$$

et, avec le lemme 1,

$$d(v,x) \asymp \frac{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|} \ll e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}.$$

$\square$

Démonstration du théorème 6. Soit $\beta < \beta_k(x)$. On peut trouver $v \in X_k(\mathbb{Q})$ arbitrairement proche de x tel que $d(v,x) \leq H(v)^{-\beta}$. La première partie de la proposition 1 montre que si $t > 0$ est tel que $e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})} = d(v,x)$, alors $\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v}\| \gg \|a_t s_x \mathbf{v}\|$ et

$$\|a_t s_x \mathbf{v}\| \ll e^{-t\frac{k}{\ell}} H(v) \leq e^{-t\frac{k}{\ell}} d(v,x)^{-\frac{1}{\beta}} \leq e^{-t[\frac{k}{\ell}-\frac{1}{\beta}(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})]}.$$

En remplaçant t par $t-C$, où C est une constante qui ne dépend que de d, on peut s'assurer que $\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v})\| \geq \frac{1}{2}\|a_t s_x \mathbf{v}\|$, et l'inégalité ci-dessus est essentiellement préservée. Cela montre que $\gamma_k(x) \geq \frac{k}{\ell} - \frac{1}{\beta}(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})$, et en faisant tendre β vers $\beta_k(x)$, que $\beta_k(x) \leq \frac{d}{(k-\ell\gamma_k(x))(d-\ell)}$.

Pour montrer l'inégalité réciproque, fixons $\gamma > \gamma_k(x)$, de sorte que pour $t > 0$ arbitrairement grand, il existe un vecteur non nul $\mathbf{v} \in \wedge^k \mathbb{Z}^d$ tel que $\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v})\| \geq \frac{1}{2}\|a_t s_x \mathbf{v}\|$ et $\|a_t s_x \mathbf{v}\| \leq e^{-\gamma t}$. A priori, la définition de $\gamma_k(x)$ n'impose pas que $\mathbf{v}$ est un vecteur pur. Cependant, la théorie de la réduction de Siegel fournit une base essentiellement orthogonale $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_D)$, où $D = \binom{d}{k}$, du réseau $\wedge^k a_t s_x \mathbb{Z}^d$ constituée de vecteurs purs. Si l'on décompose $\mathbf{v} = \sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, on a

$$\|\mathbf{v}\| \asymp \max_i |\lambda_i| \|\mathbf{u}_i\|. \tag{4}$$

Par ailleurs, $\pi_+(\mathbf{v}) = \sum_i \lambda_i \pi_+(\mathbf{u}_i)$, donc $\sum_i |\lambda_i| \|\pi_+(\mathbf{u}_i)\| \geq \|\pi_+(\mathbf{v})\| \gg \|\mathbf{v}\|$. et il existe i tel que $|\lambda_i| \|\pi_+(\mathbf{u}_i)\| \gg \|\mathbf{v}\|$. Vu (4), cela implique $\|\pi_+(\mathbf{u}_i)\| \gg \|\mathbf{u}_i\|$, et comme $|\lambda_i| \geq 1$, $\|\mathbf{u}_i\| \ll \|\mathbf{v}\|$. En d'autres termes, quitte à remplacer $\mathbf{v}$ par $\mathbf{u}_i$, on peut supposer que $\mathbf{v}$ est un vecteur pur dans $\wedge^k \mathbb{R}^d$. D'après la seconde partie de la proposition 1, le point $v \in X_k(\mathbb{Q})$ associé à $\mathbf{v}$ vérifie $H(v) \ll e^{t(\frac{k}{\ell}-\gamma)}$ et $d(v,x) \leq e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}$, ce qui donne $d(v,x) \ll H(v)^{-\frac{d}{(k-\ell\gamma)(d-\ell)}}$ puis $\beta_k(x) \geq \frac{d}{(k-\ell\gamma)(d-\ell)}$. $\square$

L'ergodicité du flot $(a_t)_{t>0}$ sur l'espace des réseaux implique que le taux de fuite de l'orbite $(a_t \Delta_x)_{t>0}$ est nul pour presque tout $x \in X_\ell$. Cela permet de retrouver facilement la valeur presque sûre de l'exposant.

Corollaire 1 (Vitesse de fuite nulle et exposant diophantien)**.** *Soient des entiers $1 \leq k \leq \ell \leq d$. Pour tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \lambda_1(a_t s_x \mathbb{Z}^d) = 0$, on a $\beta_k(x) = \frac{d}{k(d-\ell)}$. C'est le cas en particulier pour presque tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \lambda_1(a_t s_x \mathbb{Z}^d) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a, pour tout $t > 0$ suffisamment grand, $\lambda_1(a_t s_x \mathbb{Z}^d) \geq e^{-\varepsilon t}$. Par le second théorème de Minkowski, cela implique

$$e^{-\varepsilon t} \leq \lambda_1(a_t s_x \mathbb{Z}^d) \leq \dots \leq \lambda_d(a_t s_x \mathbb{Z}^d) \leq e^{d\varepsilon t}.$$

Soient $u_1,\dots,u_d$ dans $a_t s_x \mathbb{Z}^d$ des vecteurs qui réalisent ces minima successifs. D'après un lemme de Mahler [19, Theorem 3], les vecteurs

$$\mathbf{u}_\tau = u_{\tau_1} \wedge \dots \wedge u_{\tau_k}, \qquad \tau = \{\tau_1 < \dots < \tau_k\} \subset [\![1,d]\!],\ \operatorname{card}\tau = k$$

réalisent les minima successifs de $\wedge^k a_t s_x \mathbb{Z}^d$ à une constante multiplicative près qui ne dépend que de d. En particulier, en faisant tendre ε vers 0, on trouve $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\lambda_1(\wedge^k a_t s_x \mathbb{Z}^d) = 0$ ce qui implique $\gamma_k(x) \leq 0$ i.e. $\beta_k(x) \leq \frac{d}{k(d-\ell)}$.

Pour l'inégalité réciproque, notons qu'il existe τ tel que le vecteur $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau$ vérifie $\|\pi_+(\mathbf{u})\| \gg \|\mathbf{u}\|$. En effet, les vecteurs $\mathbf{u}_\tau$ engendrent un sous-réseau d'indice borné et forment une famille essentiellement orthogonale, i.e. $\|\wedge_\tau \mathbf{u}_\tau\| \gg \prod_\tau \|\mathbf{u}_\tau\|$. Comme on a aussi $\|\mathbf{u}_\tau\| \ll e^{kd\varepsilon}$, le second point de la proposition 1 implique alors que le sous-espace $v \in X_k(\mathbb{Q})$ associé à $\mathbf{v} = s_x^{-1} a_{-t}\mathbf{u}$ vérifie $H(v) \ll e^{t(\frac{k}{\ell}+kd\varepsilon)}$ puis

$$d(v,x) \ll e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})} \ll H(v)^{-\frac{1}{\frac{k}{\ell}+kd\varepsilon}(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell}))} = H(v)^{-\frac{d}{k(d-\ell)}+O(\varepsilon)}.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on trouve bien $\beta_k(x) = \frac{d}{k(d-\ell)}$.

Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer que l'ergodicité de l'action du flot (a_t) sur l'espace des réseaux unimodulaires implique que pour presque tout x dans $X_\ell(\mathbb{R})$ au sens de la mesure de Lebesgue, on a même $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\lambda_1(a_t s_x\mathbb{Z}^d) = 0$. Pour le voir, on peut remarquer que si f est une fonction intégrable sur un système dynamique ergodique, alors presque sûrement, $\lim \frac{1}{n} f(T^n x) = 0$. Cela s'applique à la fonction $f(x) = \log\frac{1}{\lambda_1(x)}$ sur l'espace des réseaux unimodulaires, dont on vérifie qu'elle est intégrable : $m(\{\log\frac{1}{\lambda_1} \geq t\}) = m(\{\lambda_1 \leq e^{-t}\}) = c\cdot e^{-2t}$ (formule de Siegel) donc $\mathbb{E}[\log\frac{1}{\lambda_1}] = \int_0^{+\infty} m(\{\log\frac{1}{\lambda_1}\geq t\})\mathrm{d}t = c\int_0^{+\infty} e^{-2t}\mathrm{d}t < +\infty$. □

Définition. Un point x dans $X_\ell(\mathbb{R})$ est dit *très bien approchable par des k-plans rationnels* si $\beta_k(x) > \frac{d}{k(d-\ell)}$. On note $\mathrm{VWA}_k(X_\ell)$ l'ensemble des points de $X_\ell(\mathbb{R})$ qui sont très bien approchables par des k-plans rationnels.

Le corollaire ci-dessus montre que l'ensemble des points très bien approchables est de mesure de Lebesgue nulle. Une autre application de la proposition concerne les inégalités qui contraignent les exposants les uns par rapport aux autres.

Proposition 2 (Comparaison des exposants β_k, $k \geq 1$)**.** *Pour tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, pour tout $k \in [\![1,\ell]\!]$, $\beta_1(x) \geq k\beta_k(x)$. En particulier, $\mathrm{VWA}_k(X_\ell) \subset \mathrm{VWA}_1(X_\ell)$.*

Démonstration. Notons que par définition, $\gamma_1(x) \leq \limsup_{t\to\infty}\frac{-1}{t}\log\lambda_1(a_t s_x\mathbb{Z}^d)$, et montrons qu'il y a en fait égalité. Cela provient du fait que a_t n'a qu'une seule valeur propre contractante dans $\mathbb{Z}^d$. En effet, pour $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d$, on peut écrire $\tilde{\mathbf{v}} = s_x\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_1$ d'où $a_t\tilde{\mathbf{v}} = e^{-\frac{t}{\ell}}\tilde{\mathbf{v}}_0 + e^{\frac{t}{d-\ell}}\tilde{\mathbf{v}}_1$ puis

$$\|a_t\tilde{\mathbf{v}}\| \asymp \max(e^{-\frac{t}{\ell}}\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|, e^{\frac{t}{d-\ell}}\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|).$$

Par conséquent, si pour certains $t > 0$ et $\gamma \in]0,\frac{1}{\ell}[$, on a $\|a_t s_x\mathbf{v}\| \leq e^{-\gamma t}$, la fonction $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \max(e^{-t(\frac{1}{\ell}-\gamma)}\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|, e^{t(\frac{1}{d-\ell}+\gamma)}\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|)$$

vérifie $f(t) \ll 1$ pour un certain $t > 0$. Or, cette fonction admet son minimum pour t_m tel que $e^{t_m(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})} = \frac{\|\tilde{\mathbf{v}}_0\|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|}$. On trouve donc $\|a_{t_m}\tilde{\mathbf{v}}\| \ll e^{-\gamma t_m}$ tandis que par définition de t_m, $\|\pi_+(a_{t_m}\tilde{\mathbf{v}})\| \gg \|a_{t_m}\tilde{\mathbf{v}}\|$. Cela montre l'égalité souhaitée.

Cette observation, combinée avec le premier théorème de Minkowski et la définition de $\gamma_k(x)$, montre que $\gamma_1(x) \geq \frac{\gamma_k(x)}{k}$, et donc

$$\beta_1(x) = \frac{d}{(1-\gamma_1)(d-\ell)} \geq \frac{d}{(1-\frac{\gamma_k}{k})(d-\ell)} = k\beta_k(x).$$

□

Remarque. L'argument utilisé pour montrer l'égalité

$$\gamma_1(x) = \limsup \frac{-1}{t} \log \lambda_1(a_t s_x \mathbb{Z}^d)$$

peut se généraliser de la façon suivante : si le flot (a_t) n'a qu'une seule valeur propre contractante sur $\wedge^j \mathbb{R}^d$, alors

$$\gamma_j(x) = \limsup \frac{-1}{t} \log \lambda_j(a_t s_x \mathbb{Z}^d).$$

Supposons pour simplifier $j \leq \ell$. Comme la seconde valeur propre de a_t sur $\wedge^j \mathbb{R}^d$ est égale à $\frac{j}{\ell} - \frac{d}{\ell(d-\ell)}$, cette condition peut se réécrire $\frac{j}{\ell} \leq \frac{d}{\ell(d-\ell)}$, i.e.

$$j \leq \frac{d}{d-\ell}.$$

(Par exemple, si $j = \ell$ ce n'est possible que si $\frac{1}{d-\ell} + \frac{1}{\ell} \geq 1$, i.e. $\ell = 1$, ou $\ell = d-1$ ou $(d,\ell) = (4,2)$.) Sous cette condition, on a toujours $\gamma_j(x) = \limsup \frac{-1}{t} \sum_{i=1}^{j} \log \lambda_i(a_t s_x \mathbb{Z}^d) \geq 0$, et donc

$$\beta_j(x) \geq \frac{d}{j(d-\ell)}.$$

Cette minoration optimale lorsque $j \leq \frac{d}{d-\ell}$ avait déjà obtenue par Schmidt [24, Theorem 15, page 462], avec une autre démonstration. Par ailleurs, sous cette condition, on peut aussi adapter la démonstration de la proposition 2 et montrer que pour tout $k \in [\![j,\ell]\!]$, $\beta_j(x) \geq \frac{j}{k}\beta_k(x)$.

Remarque. On peut énoncer le théorème 6 et la proposition pour couvrir aussi le cas $k > \ell$. Pour cela, on note $e^{-t\omega_{k,\ell}}$ la plus petite valeur propre de a_t dans la puissance extérieure $\wedge^k \mathbb{R}^d$, i.e.

$$\omega_{k,\ell} = \begin{cases} \frac{k}{\ell} & \text{si } k \leq \ell \\ \frac{d-k}{d-\ell} & \text{si } k \geq \ell \end{cases}$$

On obtient alors $\beta_k(x) = \frac{1}{\omega_{k,\ell} - \gamma_k(x)}(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell})$, et les relations de comparaisons deviennent

$$\beta_1(x) \geq \begin{cases} k\beta_k(x) & \text{si } k \leq \ell \\ \frac{k\beta_k(x)}{(k-\ell)\beta_k + 1} & \text{si } k > \ell. \end{cases}$$

L'inclusion $\mathrm{VWA}_k(X_\ell) \subset \mathrm{VWA}_1(X_\ell)$ est toujours valable.

Remarque. Il serait souhaitable plus généralement d'étudier le domaine décrit par $\beta(x) = (\beta_1(x), \ldots, \beta_{d-1}(x))$ lorsque x varie dans $X_\ell(\mathbb{R})$, mais les exposants $\beta_k(x)$, avec $k \geq 2$ sont plus subtils à étudier car la condition sur la direction du petit vecteur n'est plus automatiquement vérifiée.

2 Approximation des points algébriques

Dans cette partie, comme première application du théorème 6, nous donnons une formule pour les exposants diophantiens d'un point $x \in X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$ arbitraire. La démonstration est basée sur l'interprétation du théorème du sous-espace de Schmidt en termes d'orbites diagonales dans l'espace des réseaux, exposée dans [5]. Nous utiliserons en particulier le théorème suivant [5, Theorem 3].

Théorème 7. *Soit $(a_t)_{t>0}$ un flot diagonal dans $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et L un élément de $\mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}})$. Pour chaque $i \in [\![1,d]\!]$, la limite $\Lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\lambda_i(a_tL\mathbb{Z}^d)$ existe. De plus, si les indices $i_1 < \dots < i_r$ sont choisis de sorte que*

$$\Lambda_1 = \dots = \Lambda_{i_1} < \Lambda_{i_1+1} = \dots = \Lambda_{i_2} < \dots < \Lambda_{i_r+1} = \dots = \Lambda_d,$$

alors il existe un drapeau partiel

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{r+1} = \mathbb{Z}^d$$

de sous-espaces rationnels tel que pour chaque $s \in [\![1,r]\!]$,

- $\dim T_s = i_s$;
- *pour tout $t > 0$ assez grand, a_tLT_s contient les i_s premiers minima de $a_tL\mathbb{Z}^d$.*

Lorsqu'on considère le sous-groupe à un paramètre

$$a_t = \mathrm{diag}(e^{-\frac{t}{\ell}}, \dots, e^{-\frac{t}{\ell}}, e^{\frac{t}{d-\ell}}, \dots, e^{\frac{t}{d-\ell}})$$

et un représentant $L = s_x$ d'un point $x = P_\ell s_x$ dans la variété grassmannienne $X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$, on peut interpréter géométriquement le comportement asymptotique de l'orbite $(a_ts_x\mathbb{Z}^d)_{t>0}$ dans l'espace des réseaux. En effet, T_1 est l'unique sous-espace rationnel de dimension maximale qui maximise le quotient $\frac{\dim x\cap T_1}{\dim T_1}$, et par récurrence, T_s est l'unique sous-espace rationnel contenant T_{s-1} de dimension maximale et qui maximise $\frac{\dim x\cap T_s - \dim x\cap T_{s-1}}{\dim T_s - \dim T_{s-1}}$. De plus,

$$\Lambda_i = \frac{1}{d-\ell} - (\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell})\frac{\dim x\cap T_s - \dim x\cap T_{s-1}}{\dim T_s - \dim T_{s-1}} \quad \text{si } i_s < i \leq i_{s+1}.$$

Avec la correspondance établie à la partie précédente, ces observations permettent de donner une formule générale pour les exposants diophantiens $\beta_k(x)$ d'un sous-espace x de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. D'après le théorème 6 cela revient à donner une formule pour $\gamma_k(x)$, et c'est donc sous cette forme que nous énonçons le résultat.

Théorème 8 (Exposants d'un sous-espace algébrique)**.** *Soit $x \in X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\{0\} = T_0 < T_1 < \dots < T_r < T_{r+1} = \mathbb{Z}^d$ le drapeau partiel défini ci-dessus. Pour $s = 1, \dots, r$, posons*

$$i_s = \dim T_s \quad \textit{et} \quad j_s = \dim x \cap T_s.$$

Alors, pour $k = 1, \dots, \ell$, notant $k_s = \min(j_s, k)$,

$$\gamma_k(x) = -\sum_{s=0}^{r}(k_{s+1}-k_s)\Lambda_{i_s+1} = \frac{-k}{d-\ell} + (\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell})\sum_{s=0}^{r}\frac{(k_{s+1}-k_s)(j_{s+1}-j_s)}{i_{s+1}-i_s}.$$

Démonstration. Considérons le sous-réseau de $\wedge^k\mathbb{Z}^d$ défini par

$$S = \wedge^{k_1}T_1 \wedge (\wedge^{k_2-k_1}T_2) \wedge \cdots \wedge (\wedge^{k_{r+1}-k_r}T_{r+1}).$$

Le théorème 7 implique que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t > 0$ suffisamment grand, le réseau $a_t s_x S$ admet une base de vecteurs dont la norme est majorée par

$$\exp[t(\varepsilon + \sum_{s=0}^{r}(k_{s+1} - k_s)\Lambda_{i_s+1})].$$

De plus, par définition des entiers k_s, ce sous-espace contient un vecteur pur $\mathbf{v}_x \in \wedge^k x$. On peut toujours choisir le représentant s_x de sorte que $s_x\mathbf{v}_x = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$, et alors, il existe dans $a_t s_x S$ un vecteur $\mathbf{v}$ tel que $\|\pi_+(\mathbf{v})\| \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|$ et $\|\mathbf{v}\| \leq e^{t(\sum_{s=0}^{r}(k_{s+1}-k_s)\Lambda_{i_s+1}+O(\varepsilon))}$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, cela montre déjà l'inégalité

$$\gamma_k(x) \geq -\sum_{s=0}^{r}(k_{s+1} - k_s)\Lambda_{i_s+1}.$$

Réciproquement, le théorème 7 montre aussi que pour $\varepsilon > 0$, pour tout $t > 0$ suffisamment grand, tout vecteur $\mathbf{v}$ dans $\wedge^k\mathbb{Z}^d$ tel que

$$\|a_t s_x \mathbf{v}\| \leq e^{t(-\varepsilon + \sum_{s=0}^{r}(k_{s+1}-k_s)\Lambda_{i_s+1})}$$

appartient à un sous-espace

$$S' = \wedge^{k_1'}T_1 \wedge (\wedge^{k_2'-k_1'}T_2) \wedge \cdots \wedge (\wedge^{k_{r+1}'-k_r'}T_{r+1})$$

avec pour un certain u, $k_u' > k \geq k_u$. Par définition des entiers k_s, $s = 1, \dots, r$, le sous-espace S' ne contient aucun vecteur pur non nul de $\wedge^k x$, et donc il existe $c > 0$ tel que pour tout vecteur pur $\mathbf{v} \in S'$, $\|s_x\mathbf{v} - \pi_+(s_x\mathbf{v})\| \geq c\|s_x\mathbf{v}\|$. Cela implique

$$\begin{aligned}\|a_t s_x \mathbf{v}\| &\geq c e^{-t(\frac{k}{\ell} - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{d-\ell})}\|s_x\mathbf{v}\| \\ &\gg e^{t(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell})}\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v})\|\end{aligned}$$

et montre que le vecteur $a_t s_x \mathbf{v}$ ne saurait appartenir à C^+. Ainsi, $\gamma_k(x) \leq \varepsilon - \sum_{s=0}^{r}(k_{s+1} - k_s)\Lambda_{i_s+1}$. Lorsque ε tend vers zéro, on obtient le résultat souhaité. $\square$

Cette formule permet déjà de montrer que l'exposant diophantien $\beta_k(x)$ d'un sous-espace défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est toujours supérieur à l'exposant générique $\frac{d}{k(d-\ell)}$, et donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une égalité.

Corollaire 2. *Pour tout $x \in X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$ et tout $k \leq \ell$, on a $\beta_k(x) \geq \frac{d}{k(d-\ell)}$, avec égalité si et seulement si x n'est inclus dans aucun pinceau rationnel contraignant.*

Démonstration. D'après la proposition 1, l'exposant diophantien $\beta_k(x)$ est donné par $\beta_k(x) = \frac{d}{(k-\ell\gamma_k(x))(d-\ell)}$ et il suffit donc de montrer que $\gamma_k(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si x n'est inclus dans aucun pinceau rationnel contraignant. Lorsque $k = \ell$, on a $k_s = j_s$ pour chaque s, et donc

$$\gamma_\ell(x) = \frac{-\ell}{d-\ell} + \frac{d}{\ell(d-\ell)}\sum_{s=0}^{r}\frac{(j_{s+1} - j_s)^2}{i_{s+1} - i_s}.$$

On écrit alors

$$d\sum_{s=0}^{r}\frac{(j_{s+1}-j_s)^2}{i_{s+1}-i_s} = (\sum_{s=0}^{r}\frac{(i_{s+1}-i_s)^2}{i_{s+1}-i_s})(\sum_{s=0}^{r}\frac{(j_{s+1}-j_s)^2}{i_{s+1}-i_s})$$
$$\geq (\sum_{s=0}^{r} j_{s+1}-j_s)^2 = \ell^2$$

et cela montre que $\gamma_\ell(x) \geq 0$. L'inégalité $\gamma_k(x) \geq 0$ pour $k \leq \ell$ découle du cas particulier $k = \ell$, car comme la fonction $s \mapsto \frac{j_{s+1}-j_s}{i_{s+1}-i_s}$ est décroissante,

$$\sum_{s=0}^{r}\frac{(k_{s+1}-k_s)(j_{s+1}-j_s)}{i_{s+1}-i_s} \geq \frac{k}{\ell}\sum_{s=0}^{r}\frac{(j_{s+1}-j_s)^2}{i_{s+1}-i_s}.$$

En effet, la fonction constante par morceaux $f\colon x \mapsto \frac{j_{s+1}-j_s}{i_{s+1}-i_s}$ si $j_s < x \leq j_{s+1}$ est décroissante, et l'égalité ci-dessus s'écrit simplement $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{k}{\ell}\int_0^\ell f(x)\mathrm{d}x$.

Si $\gamma_k(x) = 0$, les calculs ci-dessus montrent que $\gamma_1(x) = 0$, et cela implique $\frac{j_1}{i_1} = \frac{\ell}{d}$ ce qui par définition de T_1 n'est possible que si $T_1 = \mathbb{Q}^d$, i.e. x n'est inclus dans aucun pinceau rationnel contraignant. Réciproquement, si x n'est inclus dans aucun pinceau rationnel contraignant, on doit avoir $T_1 = \mathbb{Q}^d$, et donc $\gamma_k(x) = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, \ell$. □

3 Valeur minimale de l'exposant diophantien

Nous avons vu dans la partie précédente que tout point de $X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifie $\beta_k(x) \geq \frac{d}{k(d-\ell)}$ pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$. En d'autres termes, l'exposant diophantien presque sûr minore uniformément l'exposant diophantien de tous les points de $X_\ell(\overline{\mathbb{Q}})$. Grâce à la remarque qui suit la démonstration de la proposition 2, on peut montrer que cette minoration encore valable sur tout $X_\ell(\mathbb{R})$ si $k \leq \frac{d}{d-\ell}$. Le but de cette partie est d'ôter cette condition restrictive en démontrant que cette minoration est valable en toute généralité. Pour cela, nous utiliserons la correspondance de la partie 1 et une description générale des orbites diagonales dans un espace de réseaux, dans l'esprit des travaux récents de Schmidt et Summerer [25], Roy [21], et Das, Fishman, Simmons et Urbański [7].

Nous voulons maintenant démontrer la première partie du théorème 1 annoncé dans l'introduction. Cela découle de l'énoncé un peu plus précis ci-dessous.

Théorème 9 (Principe de Dirichlet sur $X_\ell(\mathbb{R})$)**.** *Étant donné trois entiers $1 \leq k \leq \ell < d$, il existe une constante $C = C_{d,\ell,k}$ telle que pour tout x dans $X_\ell(\mathbb{R})$, il existe $v \in X_\ell(\mathbb{Q})$ arbitrairement proche de x tel que*

$$d(v,x) \leq CH(v)^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}.$$

Nous commençons par associer à tout réseau Δ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ une fonction convexe c_Δ sur le segments d'entiers $[\![0, d]\!]$. Cette fonction permet de retrouver la suite des minima successifs de Δ ; c'est une variante du polygone de Grayson décrit dans [11], pour laquelle on remplace la norme euclidienne par la norme égale au maximum des coordonnées dans la base canonique. Le comportement très simple de cette dernière norme par rapport à l'opérateur de dérivation sera particulièrement commode dans la suite de nos arguments.

Un polygone de Grayson

Rappelons que $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$, et que pour $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset [\![1,d]\!]$, on note $\mathbf{e}_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$. Pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, on munit $\wedge^k\mathbb{R}^d$ de la norme

$$\|x\| = \max_{|I|=k} |x_I|, \quad \text{où} \quad x = \sum_I x_I \mathbf{e}_I.$$

Ensuite, si $W = \mathbb{Z}w_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}w_k$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^d$ de rang k, on note $\|W\| = \|\mathbf{w}\|$, où $\mathbf{w} = w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$ est un représentant de W dans $\wedge^k\mathbb{R}^d$. Cette définition ne dépend pas du choix de la base $(w_i)_{1\leq i\leq k}$.

Lemme 3. *Il existe une constante $A > 0$ ne dépendant que de d telle que la fonction ϕ définie sur les sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^d$ par*

$$\phi(W) = \log\|W\| + A \cdot (\dim W)(d - \dim W)$$

soit sous-modulaire, i.e. vérifie

$$\forall V, W, \quad \phi(V) + \phi(W) \geq \phi(V \cap W) + \phi(V + W).$$

Démonstration. Pour la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^d$ et ses puissances extérieures, on a, pour tous V, W, $\|V\|_2\|W\|_2 \geq \|V \cap W\|_2\|V + W\|_2$. Comme les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes sur $\wedge^*\mathbb{R}^d$, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout V, $|\log\|V\| - \log\|V\|_2| \leq \frac{A}{2}$. Par conséquent, pour tous V, W,

$$\log\|V\| + \log\|W\| \geq \log\|V \cap W\| + \log\|V + W\| - 2A.$$

Posons alors $k = \dim V$, $\ell = \dim W$, $m = \dim V \cap W$ et $n = \dim V + W$, de sorte que $k + \ell = m + m$. Si V, W ne sont pas comparables pour l'inclusion, alors $m < \min(k, \ell)$, $n > \max(k, \ell)$, et un calcul élémentaire montre que

$$k(d-k) + \ell(d-\ell) \geq 2 + m(d-m) + n(d-n).$$

L'inégalité de sous-modularité pour ϕ découle de ces observations. □

Définition (Polygone de Grayson)**.** Étant donné un réseau Δ, le *polygone de Grayson* $c_\Delta \colon [0,d] \to \mathbb{R}$ associé à la fonction ϕ sur l'ensemble des sous-groupes discrets de Δ est la plus grande fonction convexe dont le graphe est situé au-dessous de tous les points $(\dim W, \phi(W))$, $W \leq \Delta$.

On rappelle que si $J_\Delta = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ désigne l'ensemble des points angulaires de c_Δ, il existe un unique drapeau partiel

$$\{0\} < V_{j_1} < \cdots < V_{j_r} < \Delta$$

de sous-groupes de Δ tels que pour $s = 1, \ldots, r$, $\dim V_{j_s} = j_s$ et $\phi(V_{j_s}) = c_\Delta(j_s)$. C'est la *filtration de Harder-Narasimhan* de Δ. Tout sous-groupe primitif $W \leq \Delta$ tel que $\phi(W) = c_\Delta(\dim W)$ est compatible avec cette filtration. On renvoie à [5] pour la construction de la filtration de Harder-Narasimhan et la démonstration de ses propriétés élémentaires. En ce qui nous concerne, nous aurons surtout besoin de la relier aux minima successifs de Δ ; c'est le but de la proposition suivante, qui est une reformulation du second théorème de Minkowski.

Proposition 3 (Filtration de Harder-Narasimhan et minima successifs)**.** *Soit Δ un réseau de $\mathbb{R}^d$ ayant pour filtration de Harder-Narasimhan $\{0\} < V_{j_1} < \cdots < V_{j_r} < \Delta$ et pour diagramme de Grayson c_Δ. Alors,*

1. *Il existe une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_d)$ dans Δ telle que pour tout i, $\log\|v_i\| = c_\Delta(i) - c_\Delta(i-1) + O(1)$ et $v_i \in V_{j_r}$ si $i \leq j_r$.*
2. *$\forall i = 1, \dots, d, \quad \log \lambda_i(\Delta) = c_\Delta(i) - c_\Delta(i-1) + O(1)$;*

Démonstration. Construisons par récurrence sur $s = 1, \dots, r$ une base $v_1, \dots, v_{j_s}$ de V_{j_s} telle que $\log\|v_i\| = c_\Delta(i) - c_\Delta(i-1) + O(1)$ et $v_i \in V_{j_s}$ si $i \leq j_s$. Pour $s = 0$, la famille vide convient, supposons donc $s \geq 0$ et $v_1, \dots, v_{j_s}$ construits. Par définition du diagramme de Grayson, le réseau quotient $W_{s+1} = V_{j_{s+1}}/V_{j_s}$ est de covolume comparable à $e^{c_\Delta(j_{s+1}) - c_\Delta(j_s)}$ et ne contient aucun vecteur de norme plus petite que $e^{\frac{c_\Delta(j_{s+1}) - c_\Delta(j_s)}{j_{s+1} - j_s}}$. On identifie le réseau quotient à la projection de $V_{j_{s+1}}$ sur l'orthogonal de V_{j_s}. Si $w_{j_s+1}, \dots, w_{j_{s+1}}$ est une famille d'éléments qui réalisent les minima successifs de W, le second théorème de Minkowski montre donc que pour $j = j_s + 1, \dots, j_{s+1}$,

$$\log\|w_j\| = \frac{c_\Delta(j_{s+1}) - c_\Delta(j_s)}{j_{s+1} - j_s} + O(1) = c_\Delta(j) - c_\Delta(j-1) + O(1).$$

Pour relever convenablement ces vecteurs en des éléments de $V_{j_{s+1}}$, on utilise l'hypothèse de récurrence : comme la fonction c_Δ est convexe, on peut majorer, pour tout $i \leq j_s$, $\|v_i\| \ll e^{c_\Delta(j_s) - c_\Delta(j_s - 1)}$, et par conséquent, tout élément de l'espace vectoriel engendré par V_{j_s} est à distance $O(e^{c_\Delta(j_s) - c_\Delta(j_s-1)})$ d'un élément de V_{j_s}. Cela permet de relever chaque w_j, $j = j_s + 1, \dots, j_{s+1}$ en un vecteur $v_j \in V_{j_{s+1}}$ tel que $\|v_j\| = \|w_j\| + O(e^{c_\Delta(j_s) - c_\Delta(j_s-1)}) \ll \|w_j\|$ ce qui implique

$$\log\|v_j\| = \log\|w_j\| + O(1) = c_\Delta(j) - c_\Delta(j-1) + O(1).$$

Cela montre déjà que pour chaque i, $\log \lambda_i(\Delta) \leq c_\Delta(i) - c_\Delta(i-1) + O(1)$. Mais on doit aussi avoir $\sum \log \lambda_i(\Delta) \geq 0$, car Δ est unimodulaire. Comme $\sum_i c_\Delta(i) - c_\Delta(i-1) = 0$, cela implique que pour tout i, $\log \lambda_i(\Delta) = c_\Delta(i) - c_\Delta(i-1) + O(1)$. □

Trajectoire et dérivée le long d'une orbite diagonale

Pour minorer les exposants diophantiens d'un point $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, nous voulons étudier l'évolution du polygone de Grayson le long de l'orbite $(a_t s_x \mathbb{Z}^d)_{t>0}$, où

$$a_t = \operatorname{diag}(e^{-\frac{t}{\ell}}, \dots, e^{-\frac{t}{\ell}}, e^{\frac{t}{d-\ell}}, \dots, e^{\frac{t}{d-\ell}})$$

et $s_x \in G$ est tel que $x = P s_x$. Dans toute la suite, le point x est fixé, ainsi que son représentant s_x dans G. Nous noterons pour simplifier

$$c_t = c_{a_t s_x \mathbb{Z}^d} \quad \text{et} \quad \dot{c}_t = \frac{dc_t}{dt}.$$

On munit l'espace $\mathfrak{a}$ des fonctions sur $[\![0, d]\!]$ nulles en 0 et en d de la norme euclidienne définie par

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{d-1} (f(i+1) - f(i))^2$$

dirichlet

et du produit scalaire associé. Le cœur de la démonstration du théorème 9 est la proposition suivante.

bonnebase

Proposition 4. *Pour tout $t > 0$, il existe une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_\ell$ dans $a_t s_x \mathbb{Z}^d$ telle que*

$$\|\pi_+(v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell)\| \gg c\|v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell\|$$

et

$$\log\|v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell\| \le \frac{-\ell(d-\ell)}{d}\langle \dot{c}_t, c_t\rangle + O(1).$$

Nous noterons aussi $J_t = \{j_1(t) < \dots < j_r(t)\}$ l'ensemble des points angulaires de c_t, et $\{0\} < V_{j_1} < \dots < V_{j_r} < \mathbb{Z}^d$ la filtration de Harder-Narasimhan au temps t. Les pentes du diagramme de Grayson c_t sont notées

$$\Lambda_1 = \dots = \Lambda_{j_1} < \Lambda_{j_1+1} = \dots = \Lambda_{j_2} < \dots < \Lambda_{j_r+1} = \dots = \Lambda_d.$$

Pour $t > 0$, on note $\ell_1, \dots, \ell_r$ les entiers tels que pour $s = 1, \dots, r$,

$$\frac{d}{dt}\log\|a_t s_x V_{j_s}\| = \frac{-\ell_s}{\ell} + \frac{j_s - \ell_s}{d-\ell}.$$

Les réels Λ_i et les entiers ℓ_s dépendent de t, bien que cela ne soit pas explicite dans la notation.

deriv

Lemme 4. *Avec les notations ci-dessus,*

$$\langle \dot{c}_t, c_t\rangle = -(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell})\sum_{s=0}^{r}(\ell_{s+1} - \ell_s)\Lambda_{j_s+1}.$$

Démonstration. Pour chaque i, $c_t(i+1) - c_t(i) = \Lambda_i$, tandis que par définition des entiers ℓ_s, pour $s = 1, \dots, r$,

$$\dot{c}_t(j_{s+1}) - \dot{c}_t(j_s) = \frac{j_{s+1} - j_s}{d-\ell} - (\ell_{s+1} - \ell_s)(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\langle \dot{c}_t, c_t\rangle &= \sum_{i=0}^{d-1}(\dot{c}_t(i+1) - \dot{c}_t(i))\Lambda_i \\
&= \sum_{s=0}^{r}(\dot{c}_t(j_{s+1}) - \dot{c}_t(j_s))\Lambda_{j_s+1} \\
&= \frac{1}{d-\ell}\sum_{s=0}^{r}(j_{s+1} - j_s)\Lambda_{j_s+1} - (\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell})\sum_{s=0}^{r}(\ell_{s+1} - \ell_s)\Lambda_{j_s+1}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat souhaité, car $\sum_{s=0}^{r}(j_{s+1} - j_s)\Lambda_{j_s+1} = \sum_{i=1}^{d}\Lambda_i = 0$. □

En principe, on devrait avoir $\ell_1 \le \dots \le \ell_r$, mais il est envisageable qu'en certains mauvais points, ce ne soit pas le cas. On définit donc $\ell'_1 \le \dots \le \ell'_r$ par

$$\ell'_s = \max_{i \le s} \ell_i.$$

Pour construire la famille de vecteurs $v_1, \dots, v_\ell$, on procède par induction, en commençant par $v_1, \dots, v_{\ell'_1}$ dans V_{j_1}, et en complétant cette famille successivement en une famille $v_1, \dots, v_{\ell'_s}$ d'éléments du sous-espace V_{j_s} de la filtration de Harder-Narasimhan. Pour contrôler la projection π_+ du vecteur $v_1 \wedge \dots \wedge v_{\ell'_s}$, nous aurons besoin d'un lemme élémentaire. Notons $L = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_\ell)$. Pour $j \in [\![1, d]\!]$, on considère la décomposition

$$\wedge^j \mathbb{R}^d = \wedge^j L \oplus (\wedge^{j-1} L \otimes L^\perp) \oplus \dots \oplus \wedge^j L^\perp.$$

Pour $i = 0, \dots, j$, on note $\pi_i \colon \wedge^j \mathbb{R}^d \to \wedge^{j-i} L \otimes \wedge^i L^\perp$ la projection parallèlement aux autres espaces de la décomposition ci-dessus.

proj **Lemme 5.** *Soient $i \leq j$ deux entiers de $[\![1, d]\!]$ et soit $V \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace de dimension j dont le représentant $\mathbf{v}$ dans $\wedge^j \mathbb{R}^d$ vérifie*

$$\|\pi_{j-i}(\mathbf{v})\| \gg \|\mathbf{v}\|.$$

Il existe une famille orthonormée $u_1, \dots, u_i$ d'éléments de V telle que

$$\|\pi_+(u_1 \wedge \dots \wedge u_i)\| \gg 1.$$

Plus généralement, pour tout $s \leq i$, si $v_1, \dots, v_s$ est une famille d'éléments de V telle que $\|\pi_+(v_1 \wedge \dots \wedge v_s)\| \gg \|v_1 \wedge \dots \wedge v_s\|$, on peut trouver des vecteurs unitaires $v_{s+1}, \dots, v_i$ dans V, deux à deux orthogonaux, tels que $\|\pi_+(v_1 \wedge \dots \wedge v_i)\| \gg \|v_1 \wedge \dots \wedge v_i\|$.

Démonstration. Partant d'une base orthonormée $u_1, \dots, u_j$ de V, on écrit pour chaque s, $u_s = u_s^0 + u_s^1$, où $u_s^0 \in L$ et $u_s^1 \in L^\perp$. Alors,

$$\pi_{j-i}(\mathbf{v}) = \sum_{\substack{(\varepsilon_s) \in \{0,1\}^j \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j = j-i}} u_1^{\varepsilon_1} \wedge \dots \wedge u_j^{\varepsilon_j},$$

de sorte que l'inégalité $\|\pi_{j-i}(\mathbf{v})\| \gg \|\mathbf{v}\| = 1$ implique qu'il existe $(\varepsilon_s)_s$ tel que $\|u_1^{\varepsilon_1} \wedge \dots \wedge u_j^{\varepsilon_j}\| \gg 1$. Quitte à réordonner les u_s, on peut supposer que $\varepsilon_s = 0$ si $s \leq i$ et $\varepsilon_s = 1$ sinon. On trouve alors

$$\begin{aligned} 1 &\ll \|u_1^0 \wedge \dots \wedge u_i^0 \wedge u_{i+1}^1 \wedge \dots \wedge u_j^1\| \\ &\leq \|u_1^0 \wedge \dots \wedge u_i^0\| \|u_{i+1}^1 \wedge \dots \wedge u_j^1\| \\ &\leq \|u_1^0 \wedge \dots \wedge u_i^0\|. \end{aligned}$$

Cela montre la première partie du lemme, car $\pi_+(u_1 \wedge \dots \wedge u_i) = u_1^0 \wedge \dots \wedge u_i^0$.

Pour la seconde partie, écrivons $v_1 \wedge \dots \wedge v_s = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1$, avec $\mathbf{u}^0 \in \wedge^s L$ et $\mathbf{u}^1 \in (\wedge^s L)^\perp$. Si $s = i$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il doit exister un élément u_k de la famille construite ci-dessus tel que $\|\mathbf{u}^0 \wedge u_k^0\| \gg 1$. En effet, si ce n'est pas le cas, tous les u_k^0 sont proches du sous-espace U^0 correspondant à $\mathbf{u}^0$ mais comme $\dim U^0 = s < i$, cela contredit $\|u_1^0 \wedge \dots \wedge u_i^0\| \gg 1$. On pose donc $v_{s+1} = u_k$ pour obtenir $\|\pi_+(v_1 \wedge \dots \wedge v_{s+1})\| \gg \|v_1 \wedge \dots \wedge v_{s+1}\|$. Par récurrence, cela permet de montrer le résultat souhaité. $\square$

Démonstration de la proposition bonnebase *4.* On construit la famille de vecteurs $v_1, \dots, v_\ell$ par récurrence, de sorte que pour chaque s, on ait :

1. si $\ell'_{s-1} < i \leq \ell'_s$, alors $v_i \in V_{j_s}$ et $\|v_i\| \ll \lambda_{j_s}(a_t s_x \mathbb{Z}^d)$;
2. $\|\pi_+(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{\ell'_s})\| \gg \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{\ell'_s}\|$.

Pour $s = 1$, le lemme 5 appliqué à $V = a_t s_x V_{j_1}$ montre qu'il existe une famille orthonormée $u_1, \dots, u_{\ell_1}$ dans $a_t s_x V_{j_1}$ telle que $\|\pi_+(u_1 \wedge \cdots \wedge u_{\ell_1})\| \gg 1$. Comme tous les minima successifs de $a_t s_x V_{j_1}(\mathbb{Z})$ sont comparables à $\lambda_1(a_t s_x \mathbb{Z}^d)$, le premier théorème de Minkowski permet de trouver des vecteurs $v_1, \dots, v_{\ell_1}$ dans $a_t s_x V_{j_1}$ de norme au plus $C\lambda_1$ et tels que $d(v_i, \mathbb{R}u_i) \ll \frac{\lambda_1}{C^{1/d}}$. Si C est choisi assez grand, cela implique

$$\begin{aligned}
\|\pi_+(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{\ell_1})\| &= \Big(\prod_{1 \leq i \leq \ell_1} \|v_i\|\Big) \left\| \pi_+\Big(\frac{v_1}{\|v_1\|} \wedge \cdots \wedge \frac{v_{\ell_1}}{\|v_{\ell_1}\|}\Big) \right\| \\
&\gg \prod_{1 \leq i \leq \ell_1} \|v_i\| \\
&\gg \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{\ell_1}\|.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $v_1, \dots, v_{\ell'_{s-1}}$ ont été définis, et satisfont les propriétés requises. D'après le lemme 5, il existe une famille orthonormée $u_{\ell'_{s-1}+1}, \dots, u_{\ell'_s}$ dans V_{j_s} telle que

$$\|\pi_+(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{\ell'_{s-1}} \wedge u_{\ell'_{s-1}+1} \wedge \cdots \wedge u_{\ell'_s})\| \gg \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{\ell'_{s-1}} \wedge u_{\ell'_{s-1}+1} \wedge \cdots \wedge u_{\ell'_s}\|.$$

En effet, on peut compléter une base orthonormée de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{\ell'_{s-1}}$ en une famille orthonormée qui satisfait la bonne inégalité. Comme ci-dessus, le premier théorème de Minkowski appliqué dans $a_t s_x V_{j_s}(\mathbb{Z})$ permet d'approcher les u_i, $i > \ell'_{s-1}$ par des vecteurs de $a_t s_x V_{j_s}(\mathbb{Z})$ dont on contrôle la norme : on obtient $v_{\ell'_{s-1}+1}, \dots, v_{\ell'_s}$ dans $a_t s_x V_{j_s}(\mathbb{Z})$ de norme au plus $C\lambda_{j_s}$ et tels que $d(v_i, \mathbb{R}u_i) \ll \frac{\lambda_{j_s}}{C}$. Cela donne le résultat souhaité.

Reste à montrer que lorsque $\ell'_s = \ell$, on a bien

$$\log\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell\| \leq \frac{-\ell(d-\ell)}{d} \langle \dot{c}_t, c_t \rangle + O(1).$$

Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}
\log\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell\| &\leq \sum_{i=1}^{\ell} \log\|v_i\| \\
&\leq \ell'_1 \Lambda_1 + (\ell'_2 - \ell'_1)\Lambda_{j_1+1} + \cdots + (\ell'_{s-1} - \ell'_s)\Lambda_{j_{s-1}+1} + O(1) \\
&= \ell'_1(\Lambda_1 - \Lambda_{j_1+1}) + \cdots + \ell'_{s-1}(\Lambda_{j_{s-1}+1} - \Lambda_{j_{s-2}+1}) - \ell\Lambda_{j_{s-1}+1} + O(1) \\
&\leq \ell_1(\Lambda_1 - \Lambda_{j_1+1}) + \cdots + \ell_{s-1}(\Lambda_{j_{s-1}+1} - \Lambda_{j_{s-2}+1}) - \ell\Lambda_{j_{s-1}+1} + O(1) \\
&= \ell_1 \Lambda_1 + (\ell_2 - \ell_1)\Lambda_{j_1+1} + \cdots + (\ell_{s-1} - \ell_s)\Lambda_{j_s+1} + O(1).
\end{aligned}$$

Le lemme 4 permet de conclure. $\square$

Conclusion de la démonstration

Nous voulons maintenant démontrer le théorème 9 qui montre que la valeur presque sûre de l'exposant diophantien $\beta_k(x)$ sur X_ℓ est aussi égale à sa valeur minimale. En bref, étant donné un point $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, on applique le second point de la proposition 1 aux vecteurs $v_1, \dots, v_\ell$ donnés par la proposition 4, pour construire de bonnes approximations rationnelles de x.

Démonstration du théorème 9. On reprend les notations du paragraphe précédent. En particulier $x = Ps_x$ est un point de X_ℓ, et c_t désigne le polygone de Grayson du réseau $a_t s_x \mathbb{Z}^d$, où $a_t = \mathrm{diag}(e^{-\frac{t}{\ell}}, \dots, e^{-\frac{t}{\ell}}, e^{\frac{t}{d-\ell}}, \dots, e^{\frac{t}{d-\ell}})$. D'après la proposition 4, pour tout $t > 0$, il existe des vecteurs $v_1, \dots, v_\ell$ dans $a_t s_x \mathbb{Z}^d$ tels que

$$\|\pi_+(v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell)\| \gg c\|v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell\|$$

et

$$\log\|v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell\| \leq \frac{-\ell(d-\ell)}{d}\langle \dot{c}_t, c_t\rangle + O(1).$$

Fixons $k \leq \ell$. Sans perte de généralité, on peut supposer que les vecteurs $v_1, \dots, v_\ell$ réalisent les minima successifs du sous-réseau qu'ils engendrent et dans ce cas, on a aussi,

$$\|\pi_+(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)\| \gg c\|v_1 \wedge \dots \wedge v_k\|$$

et

$$\log\|v_1 \wedge \dots \wedge v_k\| \leq \frac{-k(d-\ell)}{d}\langle \dot{c}_t, c_t\rangle + O(1).$$

Notons que $\langle \dot{c}_t, c_t\rangle = \frac{d}{dt}\frac{\|c_t\|^2}{2}$ et que comme on a toujours $\|c_t\|^2 \geq 0$, on doit avoir, pour $t > 0$ arbitrairement grand, $\langle \dot{c}_t, c_t\rangle \geq -1$, et alors

$$\log\|v_1 \wedge \dots \wedge v_k\| \leq O(1).$$

Le second point de la proposition 1 appliqué au vecteur $\mathbf{v} = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ montre que le point rationnel $v \in X_k(\mathbb{Q})$ associé à $\mathbf{v}$ vérifie

$$H(v) \ll e^{t\frac{k}{\ell}} \quad \text{et} \quad d(x,v) \ll e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}.$$

Par conséquent, $d(x,v) \ll H(v)^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}$. □

Remarque. On peut se demander quelle peut être la valeur minimale de $C_{d,\ell,k}$. À ma connaissance, le seul cas connu est $C_{2,1,1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (Hurwitz). Notons que contrairement à l'exposant diophantien, la constante $C_{d,\ell,k}$ dépend du choix de la distance sur $X_\ell(\mathbb{R})$.

4 Le théorème de Khintchine

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 3 de l'introduction, qui généralise le célèbre théorème de Khintchine [14], correspondant au cas particulier $k = \ell = 1$. Comme pour le théorème de Khintchine usuel, le cas où l'intégrale est convergente est le plus facile à traiter, et découle d'une simple application du lemme de Borel-Cantelli.

Démonstration du théorème 3 (i) : somme convergente. Pour chaque $v \in X_k(\mathbb{Q})$, l'ensemble des points $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ tels que $d(x,v) \leq H(v)^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}\psi(H(v))$ définit un voisinage de la sous-variété $\{x \mid x \supset v\}$. Cette sous-variété est de codimension $k(d-\ell)$ dans X_ℓ, et donc, à une constante multiplicative bornée près, le voisinage considéré est de mesure

$$H(v)^{-d}\psi(H(v))^{k(d-\ell)}.$$

Comme le nombre de points de hauteur au plus H dans $X_\ell(\mathbb{Q})$ est majoré par $O(H^d)$, on peut majorer la somme des mesures de ces voisinages en regroupant les points v tels que $2^p \leq H(v) < 2^{p+1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in X_k(\mathbb{Q})} &|\{x \in X_\ell(\mathbb{R}) \mid d(v,x) \leq H(v)^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}\psi(H(v))\}| \\ &\ll \sum_{v\in X_k(\mathbb{Q})} H(v)^{-d}\psi(H(v))^{k(d-\ell)} \\ &\ll \sum_{p\geq 1} 2^{-dp}\psi(2^p)^{k(d-\ell)}2^{dp} = \sum_{p\geq 1}\psi(2^p)^{k(d-\ell)}.\end{aligned}$$

Puis on majore

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 1}\psi(2^p)^{k(d-\ell)} &\leq \int_{t>0}\psi(2^t)^{k(d-\ell)}\mathrm{d}t \\ &= (\log 2)\int_u \psi(u)^{k(d-\ell)}\frac{\mathrm{d}u}{u} < +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{v\in X_k(\mathbb{Q})} |\{x \in X_\ell(\mathbb{R}) \mid d(v,x) \leq H(v)^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}\psi(H(v))\}| < +\infty,$$

et d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour presque tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, l'inégalité (3) n'a qu'un nombre fini de solutions. □

Pour montrer la seconde assertion du théorème, concernant l'intégrale divergente, nous suivons l'approche de Kleinbock et Margulis [17], basée sur la correspondance expliquée à la partie 1 et sur le mélange exponentiel de l'action du sous-groupe $(a_t)_{t>0}$ sur l'espace des réseaux.

Démonstration du théorème 3(ii) : somme divergente. Notons

$$\Psi(u) = u^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}\psi(u).$$

D'après le second point de la proposition 1, il suffit de montrer que lorsque l'intégrale diverge, pour presque tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, pour $t > 0$ arbitrairement grand, il existe $\mathbf{v} \in \wedge^k\mathbb{Z}^d$ tel que

$$\|\pi_+(a_t u_x \mathbf{v})\| \gg \|a_t u_x \mathbf{v}\| \quad \text{et} \quad \|a_t u_x \mathbf{v}\| \leq e^{-t\frac{k}{\ell}}\Psi^{-1}(e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}).$$

En effet, si $v \in X_k(\mathbb{Q})$ est le sous-espace associé à $\mathbf{v}$, on aura alors $H(v) \ll \Psi^{-1}(e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})})$ et $d(x,v) \ll e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})} \leq \Psi(H(v))$. Comme on peut toujours remplacer $\psi(u)$ par $\frac{1}{C}\psi(u)$ sans changer la nature de l'intégrale, cela donne bien le résultat souhaité. Pour $r > 0$, notons Ω'_r l'ensemble des réseaux Δ tels qu'il existe un vecteur pur $\mathbf{v} \in \wedge^k\Delta$ qui vérifie $\|\pi_+(\mathbf{v})\| \gg \|\mathbf{v}\|$ et $\|\mathbf{v}\| \leq r$. Pour $t > 0$, soit

$$r_t = e^{-t\frac{k}{\ell}}\Psi^{-1}(e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}).$$

On veut donc montrer que pour presque tout $x \in X_\ell(\mathbb{R})$, la trajectoire $(a_t\Delta_x)_{t>0}$ rencontre Ω'_{r_t} pour $t>0$ arbitrairement grand. Cela découle de la proposition 5 ci-dessous, et du fait que

$$\sum_{t\geq 1} |\Omega'_{r_t}| = +\infty.$$

En effet, à une constante multiplicative près, la théorie de la réduction [3, chapitre I, théorème 1.4 et §4] dans $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ permet de minorer la mesure de Haar de Ω'_r par

$$|\Omega'_r| \gg r^d$$

et il s'agit donc de vérifier que

$$\int \left(e^{-t\frac{k}{\ell}} \Psi^{-1}(e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})})\right)^d \mathrm{d}t = +\infty.$$

Notons pour simplifier $\beta = \frac{d}{k(d-\ell)}$. Comme ψ est décroissante, on peut majorer, pour tout $u \geq 1$, $\Psi(u) \leq u^{-\beta}\psi(1)$ puis $\Psi^{-1}(s) \leq Cs^{-\frac{1}{\beta}}$ et enfin

$$\Psi^{-1}(s) = s^{-\frac{1}{\beta}} \psi(\Psi^{-1}(s))^{\frac{1}{\beta}} \geq s^{-\frac{1}{\beta}} \psi(Cs^{-\frac{1}{\beta}})^{\frac{1}{\beta}}.$$

Cela permet de minorer l'intégrale

$$\int \left(e^{-t\frac{k}{\ell}} \Psi^{-1}(e^{-t(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})})\right)^d \mathrm{d}t \geq \int \psi(Ce^{-\frac{t}{\beta}(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})})^{k(d-\ell)} \mathrm{d}t$$

et avec le changement de variable $u = Ce^{-\frac{t}{\beta}(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})}$, $\frac{\mathrm{d}u}{u} = \beta(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})\mathrm{d}t$,

$$\gg \int \psi(u)^{k(d-\ell)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = +\infty.$$

□

C'est la proposition suivante qui utilise de manière essentielle le mélange exponentiel de l'action de (a_t) sur l'espace des réseaux, suivant la stratégie de Kleinbock et Margulis [17]. Pour sa démonstration, on renvoie à [22, proposition 3.4.1] où le résultat est démontré dans un cadre légèrement différent, mais qui s'adapte sans peine à notre problème.

flkhin **Proposition 5.** *Soit (r_t) une suite de réels positifs telle que $\sum_{t\geq 1} m_\Omega(\Omega'_{r_t}) = +\infty$. Alors, pour presque tout $x = Ps_x \in X_\ell(\mathbb{R})$, pour $t \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand,*

$$a_t s_x V(\mathbb{Z}) \in \Omega'_{r_t}.$$

5 Le théorème de Jarník

sec:jarnik

Étant donné $\tau \geq \frac{d}{k(d-\ell)}$, on considère maintenant l'ensemble $W_{k,\ell}(\tau)$ des points de $X_\ell(\mathbb{R})$ approchables à l'ordre τ par des sous-espaces rationnels de dimension k

$$W_{k,\ell}(\tau) = \{x \in X_\ell \mid \beta_k(x) \geq \tau\}.$$

Lorsque $k = \ell = 1$ le célèbre théorème de Jarník [**jarnik2**, 12] donne une formule pour la dimension de Hausdorff de $W_{1,1}(\tau)$, et Dodson [9] a généralisé ce résultat à l'approximation d'un sous-espace par des droites rationnelles, ce qui correspond à $k=1$ et ℓ quelconque. Le théorème 4 de l'introduction, que nous voulons maintenant démontrer, donne une formule analogue pour des valeurs quelconques $1 \leq k \leq \ell < d$:

$$\dim_H W_{k,\ell}(\tau) = \begin{cases} (\ell-k)(d-\ell) + \frac{d}{\tau} & \text{si } \tau > \frac{d}{k(d-\ell)} \\ \ell(d-\ell) & \text{si } \tau \leq \frac{d}{k(d-\ell)}. \end{cases}$$

Démonstration du théorème 4. Si $\tau \leq \frac{d}{k(d-\ell)}$ le théorème 1 montre que $W_{k,\ell}(\tau) = X_\ell(\mathbb{R})$, et le résultat est clair. On suppose donc dorénavant $\tau > \frac{d}{k(d-\ell)}$.

Pour $s > 0$, notons $\mathcal{H}^{(s)}$ la mesure de Hausdorff en dimension s sur $X_\ell(\mathbb{R})$ et montrons que pour $s > \frac{d}{\tau} + (\ell-k)(d-\ell)$, on a $\mathcal{H}^{(s)}(W_{k,\ell}(\tau)) < +\infty$. Pour chaque rationnel $v \in X_k(\mathbb{Q})$ de hauteur $2^p \leq H(v) < 2^{p+1}$, on a l'inclusion

$$\{x \in X_\ell(\mathbb{R}) \mid d(x,v) \leq H(v)^{-\tau}\} \subset L_v^{(2^{-p\tau})}$$

où $L_v^{(\rho)}$ est le ρ-voisinage de la sous-variété $L_v = \{x \mid x \supset v\}$. La variété L_v est de dimension $(\ell-k)(d-\ell)$, donc on peut recouvrir $L_v^{(2^{-p\tau})}$ par $O(2^{p\tau(\ell-k)(d-\ell)})$ boules de rayon $2^{-p\tau}$. Prenant la réunion sur $v \in X_k(\mathbb{Q})$ de tous ces recouvrements, on obtient un recouvrement de $W_{k,\ell}^{(\tau)}$ dont on peut majorer la mesure de Hausdorff :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(s)}(W_{k,\ell}^{(\tau)}) &\leq \sum_p \operatorname{card}\{v \in X_k(\mathbb{Q}) \mid 2^p \leq H(v) < 2^{p+1}\} 2^{p\tau(\ell-k)(d-\ell)} 2^{-p\tau s} \\ &\ll \sum_p 2^{p(d+\tau(\ell-k)(d-\ell)-\tau s)} \end{aligned}$$

et comme on a supposé $s > \frac{d}{\tau} + (\ell-k)(d-\ell)$, cette somme converge, et $\dim_H W_{k,\ell}(\tau) \leq \frac{d}{\tau} + (\ell-k)(d-\ell)$.

Pour démontrer l'inégalité réciproque, nous nous basons sur l'article de Dodson, Rynne et Vickers [10] et la notion d'ubiquité qui y est introduite. Étant donnée une fonction $\rho\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, nous dirons que la famille d'ensembles L_v, $v \in X_k(\mathbb{Q})$ a la propriété d'*ubiquité par rapport à* ρ si

$$\lim_{H\to\infty} \left| \bigcup_{H(v)\leq H} L_v^{(\rho(H))} \right| = 1.$$

Montrons que $(L_v)_{v\in X_k(\mathbb{Q})}$ a la propriété d'ubiquité par rapport à la fonction définie par

$$\rho(H) = (\log H) \cdot H^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}.$$

Pour cela, on remarque que pour presque tout point x dans $X_\ell(\mathbb{R})$, pour tout $t > 0$ suffisamment grand $\lambda_d(a_t s_x \mathbb{Z}^d) \leq t$. En effet, la mesure de l'ensemble $\{\lambda_d \leq \delta^{-1}\}$ est égale à celle de $\{\lambda_1 \leq \delta\}$, qui est de l'ordre de δ^d, par la formule de Siegel. Donc si $\alpha > \frac{1}{d}$, la somme $\sum_{t\in\mathbb{N}} |\{x \mid \lambda_d(a_t s_x \mathbb{Z}^d) \leq t^\alpha\}| \ll \sum_{t\in\mathbb{N}} t^{d\alpha} < +\infty$, et le lemme de Borel-Cantelli montre que presque sûrement, pour tout $t > 0$ suffisamment grand, $\lambda_d(a_t s_x \mathbb{Z}^d) \leq t^\alpha$. Par conséquent, on peut trouver dans $\mathbb{Z}^d$ un vecteur $\mathbf{v}$ tel que $\|a_t s_x \mathbf{v}\| \leq t$ et $\|\pi_+(a_t s_x \mathbf{v})\| \gg \|a_t s_x \mathbf{v}\|$. D'après la proposition 1, et posant $H = e^{t\frac{k}{\ell}}$, cela implique que pour tout $H \geq 1$ suffisamment grand, il existe un élément $v \in X_k(\mathbb{Q})$ tel que

$$\begin{cases} H(v) \leq H \\ d(x,v) \leq (\log H) \cdot H^{-\frac{d}{k(d-\ell)}}. \end{cases}$$

Comme ceci est valable pour presque tout x dans $X_\ell(\mathbb{R})$, on trouve

$$\lim_{H' \to \infty} \left| \bigcap_{H \geq H'} \bigcup_{H(v) \leq H} L_v^{(\rho(H))} \right| = 1$$

puis

$$\left| \bigcup_{H(v) \leq H'} L_v^{(\rho(H'))} \right| \geq \left| \bigcap_{H \geq H'} \bigcup_{H(v) \leq H} L_v^{(\rho(H))} \right| \to_{H \to \infty} 1$$

ce qui est la propriété d'ubiquité souhaitée. D'après [10, Theorem 1], si $\psi \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante, on peut minorer la dimension de l'ensemble

$$W(\psi) = \limsup_{H \to \infty} L_v^{(\psi(H(v)))} = \bigcap_{H \geq 1} \bigcup_{H(v) \geq H} L_v^{(\psi(H(v)))}$$

par

$$\dim_H W(\psi) \geq \dim \mathcal{L} + \gamma \operatorname{codim} \mathcal{L}$$

où $\dim \mathcal{L} = (\ell - k)(d - \ell)$ et $\operatorname{codim} \mathcal{L} = k(d-\ell)$ sont respectivement les dimension et codimension communes à tous les L_v, $v \in X_k$, et

$$\gamma = \min(1, \limsup_{H \to \infty} \frac{\log \rho(H)}{\log \psi(H)}).$$

Pour la fonction ψ définie par $\psi(H) = H^{-\tau}$, on a $W(\psi) = W_{k,\ell}^{(\tau)}$ et $\gamma = \frac{d}{\tau k(d-\ell)}$ d'où

$$\dim_H W_{k,\ell}^{(\tau)} \geq (\ell - k)(d - \ell) + \frac{d}{\tau}.$$

□

Remarque. Pour l'inégalité réciproque, le principe de transfert de Beresnevich et Velani [2, Theorem 3] est insuffisant lorsque $k \neq \ell$, car les ensembles de résonance L_v considérés ici ne sont pas des points, mais des sous-variétés de dimension strictement positives. C'est pour cette raison que nous sommes revenus à la notion d'ubiquité.

6 Approximation sur des sous-variétés

sec:sous-variete

Dans cette partie, on considère une sous-variété analytique connexe $M \subset X_\ell(\mathbb{R})$, et on étudie les propriétés diophantiennes d'un point x choisi aléatoirement sur M. Le premier résultat remarquable est que l'exposant d'un point choisi aléatoirement sur une sous-variété analytique est presque sûrement constant. Lorsque $k = 1$, ce résultat est du à Kleinbock [18]. Comme dans ce cas particulier, la démonstration est basée sur la correspondance de Dani et sur l'inégalité de non divergence quantitative. Mais si $k = 1$, il faut contrôler la direction des petits vecteurs le long de l'orbite diagonale, et cela complique sensiblement l'argument.

Théorème 10 (Existence de l'exposant d'une sous-variété analytique)**.** *Pour chaque $k = 1, \dots, \ell$, il existe un exposant $\beta_k(M)$ tel que pour presque tout x dans M, $\beta_k(x) = \beta_k(M)$. De plus $\beta_k(M)$ est entièrement déterminé par l'adhérence de Zariski de M.*

Comme l'exposant $\beta_k(x)$ est entièrement déterminé par le taux de fuite $\gamma_k(x)$, le théorème découle du lemme 6 ci-dessous, appliqué au flot diagonal $\wedge^k a_t$ sur l'espace $\mathbb{R}^D = \wedge^k \mathbb{R}^d$. Rappelons que si G est un espace métrique, $C, \alpha > 0$ deux constantes et μ une mesure borélienne finie sur G, une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ est dite (C,α)-régulière pour μ si pour toute boule $B = B(x,r)$ centrée en $x \in \operatorname{Supp}\mu$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{g \in B \mid |f(g)| \leq \varepsilon \|f\|_{B,\mu}\}) \leq C\varepsilon^\alpha \mu(B),$$

où l'on note $\|f\|_{B,\mu} = \sup_{y \in B \cap \operatorname{Supp}\mu} |f(y)|$. Dans la démonstration du lemme ci-dessous, nous utiliserons plusieurs fois la propriété importante des fonctions analytiques, qui résulte des travaux de Kleinbock et Margulis [16, proposition 2.3] : si $\mathcal{F}$ est un sous-espace de dimension finie de fonctions analytiques sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^s$ et $x \in O$, il existe un voisinage U de x et des constantes $C, \alpha > 0$ telles que toute fonction $f \in \mathcal{F}$ soit (C,α)-régulière sur U.

Lemme 6. *Soit $(a_t)_{t>0}$ un sous-groupe diagonal à un paramètre dans $\mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$. On note $\pi_+\colon \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ la projection sur le sous-espace propre de (a_t) associé à la plus petite valeur propre, parallèlement aux autres espaces propres, et pour Δ un réseau dans $\mathbb{R}^D$,*

$$\gamma(\Delta) = \limsup_{t\to\infty} \frac{-1}{t} \min\{\log\|v\| \ ; \ v \in \Delta \setminus \{0\} \ \textit{tel que} \ \|\pi_+(v)\| \geq \frac{1}{2}\|v\|\}.$$

Si $M \subset \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$ est une sous-variété analytique connexe, alors il existe $\gamma_M \in \mathbb{R}$ tel que pour presque tout $g \in M$,

$$\gamma(g\mathbb{Z}^d) = \gamma_M.$$

De plus, γ_M ne dépend que de l'adhérence de Zariski de M. Et même seulement des adhérences linéaires de M dans chacune des représentations $\wedge^k \mathbb{R}^D$, $k = 1, \dots, D$.

Démonstration. Pour g dans $\mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$, et $t > 0$, on note c_t^g le polygone de Grayson associé au réseau $a_t g \mathbb{Z}^D$. C'est un élément du cône $\mathfrak{a}^+$ des fonctions convexes $c\colon [\![0, D]\!] \to \mathbb{R}$ telles que $c(0) = c(D) = 0$. Soit $g_0 \in M$ fixé. L'inégalité de non divergence quantitative et le lemme de Borel-Cantelli montrent qu'il existe une application $c_t^M\colon t \to \mathfrak{a}^+$ telle que pour presque tout g au voisinage de g_0, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t > 0$ assez grand,

$$\|c_t^g - c_t^M\| \leq \varepsilon t.$$

(On renvoie à [22, corollaire 7.2.2] pour une démonstration détaillée de ce point, dans un cadre un peu plus général.) Ensuite, d'après [23, corollary 1] si

$$I_t = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subset [\![1, D]\!]$$

désigne l'ensemble des indices où le graphe de $i \mapsto c_t^M(i)$ admet un saut de pente supérieur à $t\varepsilon$ i.e. $c_t^M(i) - c_t^M(i-1) + t\varepsilon \leq c_t^M(i+1) - c_t^M(i)$, il existe un drapeau partiel

$$\{0\} < V_{i_1} < \cdots < V_{i_r} < \mathbb{Z}^d$$

tel que pour g dans un voisinage de g_0, avec probabilité supérieure à $1 - Ce^{-\alpha\varepsilon t}$, pour chaque $s = 1, \ldots, r$, les i_s premiers minima successifs de $a_t g\mathbb{Z}^D$ sont atteints dans $a_t g V_{i_s}$. En outre, les applications $t \mapsto c_t^M$ et $t \mapsto (V_{i_s})_{1 \leq s \leq r}$ sont entièrement déterminées par l'adhérence de Zariski de M. L'application $t \mapsto c_t^M$ est considérée « à une constante additive près ».

Notons E^+ l'espace propre de a_t associé à la valeur propre la plus contractante, et E^- la somme des autres espaces propres, de sorte que $\mathbb{R}^D = E^+ \oplus E^-$. Si V est un sous-espace de $\mathbb{R}^D$, on note la distance de V à E^-

$$d(V, E^-) = \max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{d(v, E^-)}{\|v\|}.$$

L'égalité $d(V, E^-) = 0$ correspond à l'inclusion $V \subset E^-$, qui est équivalente à ce que V rencontre tout sous-espace de E^- de codimension $\dim V - 1$. Par suite, si $\mathbf{v}$ est un représentant de V dans $\wedge^{\dim V}\mathbb{R}^D$ et $(\mathbf{u}_j)_{j \in J}$ une base orthonormée de $\wedge^{1+\dim E^- - \dim V} E^-$,

$$d(V, E^-) \asymp \max_{j \in J} \frac{\|\mathbf{u}_j \wedge \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Toutes les fonctions $g \mapsto \|a_t g \mathbf{w}\|$, où $\mathbf{w} \in \wedge^* \mathbb{R}^d$, sont (C, α)-régulières au voisinage de g_0 pour la mesure de Lebesgue sur M ; l'égalité ci-dessus permet donc de montrer que pour chaque $i \in I_t$, il existe $f_i = f_i(t, \varepsilon) \geq 0$ tel que

$$\lambda_M(\{g \in U \mid e^{-t(f_i + \varepsilon)} \leq d(a_t g V_i, E^-) \leq e^{-t(f_i - \varepsilon)}\}) \geq (1 - Ce^{-\alpha\varepsilon t})\lambda_M(U).$$

En effet, si $\mathbf{v}_i$ est un représentant de V_i dans $\wedge^i \mathbb{R}^D$ et $(\mathbf{u}_j)_{j \in J}$ une base orthonormée de $\wedge^{\dim E^- - i + 1} E^-$,

$$d(a_t g V_i, E^-) \asymp \max_{j \in J} \frac{\|\mathbf{u}_j \wedge a_t g \mathbf{v}_i\|}{\|a_t g \mathbf{v}_i\|}.$$

Or, par (C, α)-régularité des fonctions $g \mapsto \|\mathbf{u}_j \wedge a_t g \mathbf{v}_i\|$ et $x \mapsto \|a_t g \mathbf{v}_i\|$ pour la mesure λ_M au voisinage de g_0, on a avec λ_M-probabilité $1 - Ce^{-\alpha\varepsilon t}$,

$$\|\mathbf{u}_j \wedge a_t g \mathbf{v}_i\| \geq e^{-\varepsilon t} \sup_{h \in U \cap M} \|\mathbf{u}_j \wedge a_t h \mathbf{v}_i\|$$

et

$$\|a_t g \mathbf{v}_i\| \geq e^{-\varepsilon t} \sup_{h \in U \cap M} \|a_t h \mathbf{v}_i\|.$$

Par conséquent, si f_i est choisi tel que $e^{-f_i t} = \max_j \frac{\sup_{h \in U \cap M} \|\mathbf{u}_j \wedge a_t h \mathbf{v}_i\|}{\sup_{h \in U \cap M} \|a_t h \mathbf{v}_i\|}$, on a avec probabilité supérieure à $1 - Ce^{-\alpha\varepsilon t}$, pour $g \in U \cap M$,

$$d(a_t g V_i, E^-) \leq \max_j \frac{\sup_{h \in U \cap M} \|\mathbf{u}_j \wedge a_t h \mathbf{v}_i\|}{\|a_t g \mathbf{v}_i\|} \leq e^{-t(f_i - \varepsilon)}$$

et

$$d(a_t g V_i, E^-) \geq \max_j \frac{\|\mathbf{u}_j \wedge a_t g \mathbf{v}_i\|}{\sup_h \|a_t h \mathbf{v}_i\|} \geq e^{-t(f_i+\varepsilon)}.$$

Ici encore, les applications $t \mapsto f_i$ sont déterminées par l'adhérence de Zariski de M. Cela provient de ce que les applications $h \mapsto \mathbf{u}_i a_t h \mathbf{v}_i$ sont linéaires et vérifient donc, pour certaines constantes indépendantes de $\mathbf{u}_i$, a_t et $\mathbf{v}_i$, $\sup_{h\in B\cap M}\|\mathbf{u}_i \wedge a_t h \mathbf{v}_i\| \asymp \sup_{h\in B\cap\mathcal{L}(M)}\|\mathbf{u}_i \wedge a_t h \mathbf{v}_i\|$, où $\mathcal{L}(M)$ est l'adhérence linéaire de l'image de M dans la représentation $\wedge^{\dim V_i}\mathbb{R}^d$. De même pour $h \mapsto a_t h \mathbf{v}_i$. Avec le lemme de Borel-Cantelli, ces inégalités montrent que pour presque tout g dans $U \cap M$, pour tout $t > 0$ suffisamment grand,

$$\begin{cases} \|c_t^g - c_t^M\| \leq t\varepsilon \\ \forall s = 1, \dots, r, \quad c_t^g(i_s) = \log\|a_t g V_{i_s}\| \\ d(a_t g V_{i_s}, E^-) \in [e^{-t(f_i+\varepsilon)}, e^{-t(f_i-\varepsilon)}] \end{cases}$$

Notons que $f_{i_1} \geq f_{i_2} \geq \dots \geq f_{i_k}$. Soit $j_t = j_t(\varepsilon) \in I_t$ le plus petit indice tel que $f_{j_t} \leq 2\varepsilon$. Montrons que pour presque tout g dans $U \cap M$,

$$\gamma(g) = \limsup_{t\to\infty} \frac{-1}{t}(c_t^M(j_t) - c_t^M(j_t - 1)) + O(\varepsilon).$$

Tout d'abord, l'inégalité $f_{j_t} \leq 2\varepsilon$ implique $d(a_t g V_{j_t}, E^-) \geq e^{-3t\varepsilon}$, et comme $a_t g V_{j_t}(\mathbb{Z})$ admet une base constituée de vecteurs de norme au plus $e^{c_t^g(j_t)-c_t^g(j_t-1)} = e^{c_t^M(j_t)-c_t^M(j_t-1)+tO(\varepsilon)}$, il existe un vecteur $v \in a_t g V_{j_t}(\mathbb{Z})$ tel que $\|\pi^+(v)\| \geq e^{-tO(\varepsilon)}\|v\|$ et $\|v\| = e^{c_t^M(j_t)-c_t^M(j_t-1)+tO(\varepsilon)}$. Comme π^+ est la projection sur l'espace le plus contracté, on peut remplacer t par $t - O(\varepsilon)$ pour s'assurer l'inégalité un peu plus forte $\|\pi^+(v)\| \geq \frac{\|v\|}{2}$, et cela n'affecte la norme de v que d'un facteur $e^{O(\varepsilon)t}$. Par suite,

$$\gamma(g\mathbb{Z}^D) \geq \limsup_{t\to\infty} \frac{-1}{t}(c_t^M(j_t) - c_t^M(j_t - 1)) - O(\varepsilon).$$

Réciproquement, soit $V_{j_t'}$ le sous-espace qui précède V_{j_t} dans le drapeau $V_{i_1} < \dots < V_{i_r}$. Comme pour presque tout $g \in U \cap M$, pour tout t assez grand

$$d(a_t g V_{t,\varepsilon}^{j_t'}, E^-) \leq e^{-(f_{j-1}-\varepsilon)t} \leq e^{-\varepsilon t}$$

aucun vecteur $v \in a_t g V_{j_t'}$ ne saurait satisfaire $\|\pi^+(v)\| \geq \frac{\|v\|}{2}$. Or tout vecteur $v \in a_t g \mathbb{Z}^D$ hors de $a_t g V_{j_t'}$ vérifie

$$\|v\| \gg e^{c_t^M(j_t'+1)-c_t^M(j_t')} \geq e^{c_t^M(j_t)-c_t^M(j_t-1)-(j_t-j_t')t\varepsilon},$$

où la deuxième inégalité provient de ce que les sauts de la dérivée de $i \mapsto c_t^M(i)$ sont majorés par $t\varepsilon$ sur tout l'intervalle $]j_t', j_t[$. Par suite,

$$\gamma(g\mathbb{Z}^D) \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{-1}{t}(c_t^M(j_t) - c_t^M(j_t - 1)) - O(\varepsilon).$$

Ainsi, il existe un voisinage U de g_0 tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\gamma_\varepsilon = \limsup_{t\to\infty} \frac{-1}{t}(c_t^M(j_t) - c_t^M(j_t-1))$ entièrement contrôlé par l'adhérence de Zariski de M et tel que pour presque tout g dans $U \cap M$, $\gamma(g\mathbb{Z}^D) \in [\gamma_\varepsilon - \varepsilon, \gamma_\varepsilon + \varepsilon]$. En faisant tendre ε vers 0, cela montre que $\gamma(g\mathbb{Z}^D)$ est constant presque partout au voisinage de tout point $g_0 \in M$, et comme M est connexe, $\gamma(g\mathbb{Z}^D)$ est constant presque sûrement sur M. $\square$

On peut chercher à comprendre quelles sous-variétés $M \subset X_\ell(\mathbb{R})$ vérifient $\beta_k(M) = \frac{d}{k(d-\ell)}$, et le critère suffisant obtenu dans [1] lorsque $k = 1$ s'étend naturellement aux autres exposants β_k, $k = 1, \ldots, \ell$.

Théorème 11 (Critère suffisant d'extrémalité)**.** *Soit $M \subset X_\ell(\mathbb{R})$ une sous-variété analytique connexe. Si M n'est incluse dans aucun pinceau contraignant, alors, pour tout $k = 1, \ldots, \ell$, pour presque tout $x \in M$,*

$$\beta_k(x) = \frac{d}{k(d-\ell)}.$$

Démonstration. D'après la proposition 2, on a toujours $\frac{1}{k}\beta_1(x) \geq \beta_k(x) \geq \frac{d}{k(d-\ell)}$, il suffit donc de démontrer que $\beta_1(x) = \frac{d}{d-\ell}$ pour presque tout x dans M. C'est exactement ce que donne [1, Corollary 1.6]. □

Ce critère suffisant est essentiellement optimal, puisque lorsque M est incluse dans un pinceau *rationnel* contraignant, M n'est pas extrémale. La réciproque est fausse en général, mais valable si l'on suppose que l'adhérence de Zariski de M est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Dans ce cas, le théorème 12 ci-dessous donne même une formule pour les exposants $\beta_k(M)$, analogue à celle du théorème 8.

Étant donnée une sous-variété analytique connexe $M \subset X_\ell$, la fonction

$$\begin{array}{cccc} \phi_M\colon & \mathrm{Grass}(\mathbb{Q}^d) & \to & \mathbb{R} \\ & V & \mapsto & \min_{x\in M} \dim x \cap V \end{array}$$

est sous-modulaire, et suivant [5, §1.3] on peut lui associer un drapeau partiel

$$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{r+1} = \mathbb{Q}^d$$

tel que pour chaque $s = 1, \ldots, r$, T_s est l'unique sous-espace rationnel contenant T_{s-1} de dimension maximale et qui maximise $\frac{\phi_M(T_s)-\phi_M(T_{s-1})}{\dim T_s - \dim T_{s-1}}$. De plus, d'après [5, Theorem 3] ce drapeau détermine le comportement asymptotique de l'orbite $a_t s_x \mathbb{Z}^d$ lorsque le point x est choisi aléatoirement sur M :

- pour tout $t > 0$ assez grand, $a_t s_x T_s$ contient les i_s premiers minima de $a_t s_x \mathbb{Z}^d$;
- pour $i \in [\![i_s, i_{s+1}-1]\!]$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \lambda_i(a_t s_x \mathbb{Z}^d) = \Lambda_i$, où

$$\Lambda_i = \frac{1}{d-\ell} - (\frac{1}{\ell} + \frac{1}{d-\ell})\frac{\phi_M(T_s) - \phi_M(T_{s-1})}{\dim T_s - \dim T_{s-1}}.$$

Théorème 12 (Variétés définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$)**.** *Soit $M \subset X_\ell(\mathbb{R})$ une sous-variété analytique connexe, dont l'adhérence de Zariski est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Le drapeau rationnel $\{0\} = T_0 < T_1 < \cdots < T_{r+1} = \mathbb{Z}^d$ associé à M détermine tous les exposants $\widehat{\beta}_k(M)$: si l'on pose, pour $s = 1, \ldots, r$,*

$$i_s = \dim T_s \quad \textit{et} \quad j_s = \phi_M(T_s) = \min_{x\in M} \dim x \cap T_s,$$

alors, pour $k = 1, \ldots, \ell$, notant $k_s = \min(j_s, k)$,

$$\gamma_k(x) = -\sum_{s=0}^{r}(k_{s+1}-k_s)\Lambda_{i_s+1} = \frac{-k}{d-\ell} + (\frac{1}{\ell}+\frac{1}{d-\ell})\sum_{s=0}^{r}\frac{(k_{s+1}-k_s)(j_{s+1}-j_s)}{i_{s+1}-i_s}.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du théorème 8. Il suffit d'utiliser le comportement asymptotique de l'orbite $(a_t s_x \mathbb{Z}^d)_{t>0}$ décrit ci-dessus au lieu du théorème 7. $\square$

Remarque. Attention ! Le drapeau sur $\overline{\mathbb{Q}}$ associé à M ne détermine pas le drapeau rationnel.

Conclusion

Pour conclure cet article nous mentionnons d'autres problèmes dont l'étude permettrait de généraliser les résultats obtenus ci-dessus. Les deux premiers apparaissent déjà dans l'article originel de Schmidt [24].

Corps de nombres On peut remplacer le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par un corps de nombres K réel quelconque, et étudier l'approximation d'un sous-espace réel par des sous-espaces définis sur K. Une fois définie la hauteur sur l'ensemble des sous-espaces définis sur K, les exposants diophantiens $\beta_k(x)$, $k = 1, \ldots, d-1$ d'un point $x \in X_\ell(\mathbb{R})$ se définissent exactement comme auparavant. Pour adapter nos méthodes à ce cadre, on remplace l'espace des réseaux $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ par l'espace $\mathrm{SL}_d(K_S)/\mathrm{SL}_d(\mathcal{O}_K)$, où $\sigma\colon K \to K_S \simeq \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ désigne le plongement canonique de K, et l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K est plongé dans K_S via σ. Cela permet notamment de montrer un principe de Dirichlet analogue au théorème 1, et l'on observe alors que l'exposant critique $\frac{d}{k(d-\ell)}$ pour β_k ne dépend pas du choix de K, ce qui avait été conjecturé par Schmidt. C'est en outre une fonction symétrique de k et ℓ. (Cela ne se voit pas sur la formule, car on a supposé $k \leq \ell$.)

Approximation sur une dimension intermédiaire Comme auparavant, on suppose $1 \leq k \leq \ell < d$. On fixe en outre un entier $j \leq k$. Pour x dans $X_\ell(\mathbb{R})$ et y dans $X_k(\mathbb{R})$, Schmidt définit

$$\psi_j(y, x) = \min\{d(y^j, x) \mid y^j \subset y \text{ de dimension } j\}.$$

Les quantités $\psi_j(y, x)$, $j = 1, \ldots, k$, décrivent totalement la position de y par rapport à x. Schmidt suggère d'étudier l'approximation diophantienne en termes des fonctions $\psi_j(y, x)$, $j = 1, \ldots, k$. Lorsque $j = k$, on a bien sûr $\psi_k(y, x) = d(y, x)$, et cela correspond au problème que nous avons étudié. Mais en général, le problème du principe de Dirichlet pour ψ_j est largement ouvert. Élio Joseph [13, théorème 3.3] a récemment résolu ce problème dans le cas $d = 4$, $\ell = k = 2$ et $j = 1$. Moshchevitin [20] a de son côté commencé l'étude de l'approximation diophantienne métrique dans ce cadre. On renvoie à Joseph [13, chapitre 1] pour une présentation historique détaillée des différents résultats du domaine.

Spectre des exposants Nous avons vu que l'ensemble des valeurs prises par l'exposant $\beta_k(x)$ lorsque x varie dans $X_\ell(\mathbb{R})$ est égal à l'intervalle $[\frac{d}{k(d-\ell)}, +\infty[$. Plus généralement, il serait intéressant de déterminer l'ensemble des valeurs qui peuvent être prises par la famille d'exposants $(\beta_k(x))_{1\leq k\leq d}$ lorsque x décrit $X_\ell(\mathbb{R})$. La proposition 2 donne un résultat très partiel dans cette direction.

Références

abrs2 [1] Menny Aka, Emmanuel Breuillard, Lior Rosenzweig et Nicolas de Saxcé. Diophantine approximation on matrices and Lie groups. *Geom. Funct. Anal.*, 28(1) :1-57, 2018.

bv_transfert [2] Victor Beresnevich et Sanju Velani. A mass transference principle and the Duffin-Schaeffer conjecture for Hausdorff measures. *Ann. Math. (2)*, 164(3) :971-992, 2006.

borel_iga [3] Armand Borel. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341. Hermann, Paris, 1969, page 125.

bourbaki_alg [4] Bourbaki. *Algèbre*.

bs_subspace [5] E. Breuillard et N. de Saxcé. A subspace theorem for manifolds. *preprint arXiv :2101.04055v2*.

dani [6] S. G. Dani. Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and diophantine approximation. *J. Reine Angew. Math.*, 359 :55-89, 1985.

dfsu_variational [7] Das, Fishman, Simmons et Urbański. A variational principle in the parametric geometry of numbers.

dirichlet [8] Dirichlet. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. *S. B. Preuss. Akad. Wiss.* :93-95, 1842.

dodson [9] Dodson. Hausdorff dimension, lower order and Khintchine's theorem in metric Diophantine approximation.

drv [10] M. M. Dodson, B. P. Rynne et J. A. G. Vickers. Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension. *Mathematika*, 37(1) :59-73, 1990.

grayson [11] Grayson. Reduction theory using semistability.

jarnik [12] Jarník. Diophantische Approximationen und Hausdorff Mass.

joseph [13] Elio Joseph. Approximation rationnelle de sous-espaces vectoriels.

khintchine [14] A. Khintchine. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Mathematische Zeitschrift*, 24 :706-714, 1, 1926.

kleinbock_extremal [15] Kleinbock. Extremal subspaces and their submanifolds.

kleinbockmargulis [16] D. Y. Kleinbock et G. A. Margulis. Flows on homogeneous spaces and diophantine approximation on manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 148(1) :339-360, 1998.

km_loglaws [17] D. Y. Kleinbock et G. A. Margulis. Logarithm laws for flows on homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 138(3) :451-494, 1999.

kleinbock_dichotomy [18] Dmitry Kleinbock. An 'almost all versus no' dichotomy in homogeneous dynamics and diophantine approximation. *Geom. Dedicata*, 149 :205-218, 2010.

mahler [19] Mahler. On compound convex bodies (i).

moshchevitin [20] Moshchevitin. ÜBER DIE WINKEL ZWISCHEN UNTERRÄUMEN.

roy [21] Roy. On schmidt and summerer parametric geometry of numbers.

saxce_hdr [22] Nicolas de SAXCÉ. Groupes arithmétiques et approximation diophantienne.

saxce_hnnondivergence [23] Nicolas de SAXCÉ. Non-divergence in the space of lattices.

schmidt_grass [24] W. M. SCHMIDT. On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations. *Ann. Math. (2)*, 85 :430-472, 1967.

schmidtsummerer [25] SCHMIDT et SUMMERER. Diophantine approximation and parametric geometry of numbers.