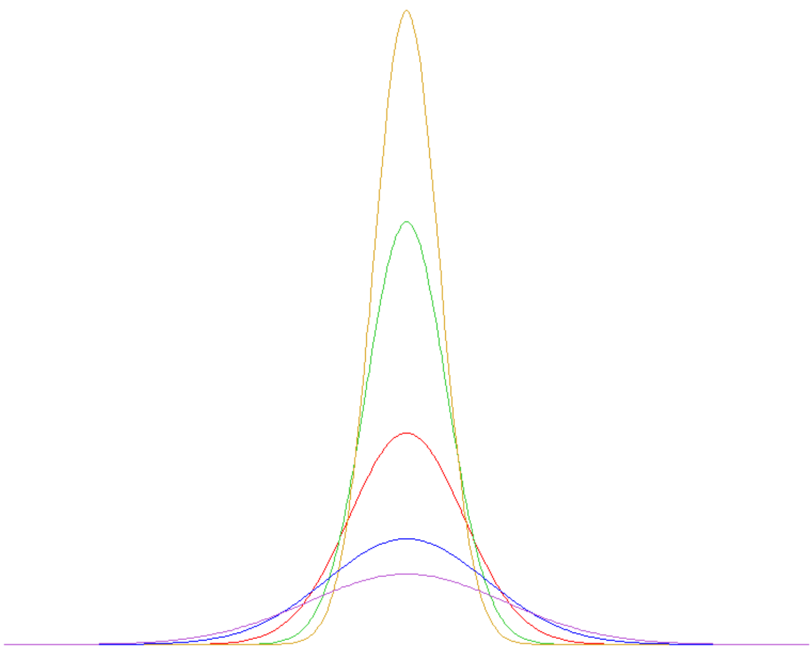
U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs MACS

Année scolaire 2019-2020

Théorie des distributions. Deuxième partie : transformation de Fourier

H. Boumaza, T. Duyckaerts



Le 4 octobre 2019

Bibliographie

[1] J.M. Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses.

[2] G. Carlier, *Notes de cours : Analyse fonctionnelle*,
https ://www.ceremade.dauphine.fr/ carlier/poly2010.pdf

[3] J. Faraut, *Calcul intégral*, 2006, EDP Sciences.

[4] F. Golse, *Notes de cours : Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, http ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf

[5] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (256), Springer.

[6] J.P. Marco et autres, *Mathématiques L3, Analyse* , Pearson Education France.

[7] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York-London, 1975.

[8] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Sciences Sup, Dunod.

Table des matières

Chapitre 7

Transformation de Fourier

7.1 La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

7.1.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

De façon classique, la transformée de Fourier est définie sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

où $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$. Cette théorie classique n'est pas entièrement satisfaisante : en effet la transormation de Fourier n'est pas une bijection de l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$: la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est continue, et donc une fonction intégrable non continue ne peut pas s'écrire comme la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Par la formule d'inversion de Fourier cela implique aussi que la tranformée de Fourier d'une fonction intégrale non continue n'est pas intégrable.
Dans ce chapitre nous allons étendre la tranformation de Fourier à une bijection d'un espace contenant L^1 (et en fait tous les espaces L^p) dans lui même, en utilisant la théorie des distributions. Pour cela, nous allons définir la transformation de Fourier d'une distribution par dualité, comme nous l'avons fait pour la multiplication et la dérivée des distributions, en posant :

$$< \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}(\varphi) >$$

pour toute fonction test φ. Nous voyons tout de suite que cette définition pose problème : si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, rien ne permet d'affirmer que $\mathcal{F}(\varphi)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. En fait la transformée de Fourier d'une fonction à support compact non nulle n'est *jamais* à support compact !
Nous commencerons donc par agrandir l'espace des fonctions test, en introduisant un espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, contenant $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et strictement inclus dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et qui est invariant par la transformée de Fourier. Nous allons ensuite étendre la transformation de Fourier par dualité au dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, qui peut-être identifié à un sous-espace strict de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Comme nous l'avons noté dans des situations analogues, il est intéressant de choisir l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ le plus petit possible, pour que son dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ soit le plus grand possible. Cette approche peut paraître paradoxale : pour étendre la transformation de Fourier à un espace plus grand que $L^1(\mathbb{R}^d)$, on commence par l'étudier sur un espace plus petit !
Dans cette partie on introduit l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puis on étudie la transformation de Fourier sur cet espace. Pour pouvoir dériver les éléments de $\mathcal{S}'$, on commence par se restreindre à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, une condition suffisante pour que $\hat{f}$ soit dérivable est que f et $x \mapsto xf(x)$ soient toutes deux intégrables. Plus généralement, pour avoir $\hat{f}$ de classe C^∞, il suffit d'avoir $x \mapsto x^p f(x)$ intégrable pour tout $p \geq 0$. On veut aussi avoir le même contrôle pour toutes les dérivées de f. Cela conduit à introduire l'espace de Schwartz.

Définition 7.1.1. *L'espace $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, appelé espace de Schwartz, est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}. \tag{7.1}$$

L'espace $\mathcal{S}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel (on considère ici des fonctions à valeurs complexes).

Exemple 7.1.2.

1. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$.*
2. *Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, z > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-z|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}$.*
3. *Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-z|x|^2}$ avec $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ z > 0$ et P une fonction polynomiale, sont dans* S.

Remarque 7.1.3. *Dans la définition 7.1.1, nous aurions pu remplacer (7.1) par la condition*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = 0.$$

Avant de définir la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ nous donnons encore quelques propriétés de cet espace. Commençons par le munir d'une topologie. Pour cela on défini les normes

$$\forall N, p \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in \mathcal{S},\ q_{p,N}(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \leq N}} |(1+|x|)^p \partial^\alpha \varphi(x)|, \quad q_N(f) = q_{N,N}(f) \tag{7.2}$$

et la distance :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{2^N} \min(q_N(\varphi - \psi), 1)$$

Théorème 7.1.4. *Muni de cette distance, $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel métrique complet.*

Nous laissons la démonstration (sans surprise) de ce théorème au lecteur intéressé. Nous avons alors les propriétés suivantes que nous ne démontrerons pas.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les applications $f \mapsto x^\alpha f$ et $f \mapsto \partial^\alpha f$ sont continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.
2. Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$ (c'est une conséquence de la formule de Leibniz).
3. L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}$.
4. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.
5. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par la définition de la distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ quand n tend vers l'infini si et seulement si
$$\forall p \geq 0, \quad \lim_{n \to \infty} q_p(\varphi - \varphi_n) = 0.$$

7.1.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On remarque que, pour $f \in \mathcal{S}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. La définition qui suit a donc bien un sens.

Définition 7.1.5. *Pour $f \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ est la fonction définie par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{R^d} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

où pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots x_d\xi_d$.

Commençons par calculer la transformée de Fourier d'une Gaussienne. Cet exemple est essentiel non seulement dans un cadre théorique pour obtenir la formule d'inversion de Fourier, mais aussi dans diverses applications, comme dans le calcul des probabilités (voir théorème de Lévy ou le Théorème Central Limite).

Exemple 7.1.6. *Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit $f \; : \; x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda |x|^2}$. Alors $f \in \mathcal{S}$ et*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \; \hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4\lambda}}. \tag{7.3}$$

Etape 1. *On commence par effectuer le calcul dans le cas où $d = 1$ et $z = \lambda > 0$ est réel. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et*

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} -\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

L'usage du théorème est justifié par domination à l'aide de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ qui décroît plus vite à l'infini que n'importe quel polynôme et en particulier $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Comme $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x$$

et une intégration par parties montre que

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

Ainsi $\hat{f}$ est solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\xi}{2\lambda}\hat{f}$ avec comme condition initiale $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est bien

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}.$$

Etape 2. *On passe au cas où $d \geq 2$. Le résultat est alors une conséquence directe du théorème de Fubini :*

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\mathrm{d}x = \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1}\mathrm{e}^{-\lambda x_1^2}\mathrm{d}x_1\right)\cdots\left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_d\xi_d}\mathrm{e}^{-\lambda x_d^2}\mathrm{d}x_d\right),$$

ce qui donne, par propriété de morphisme de l'exponentielle, la formule voulue.

Remarque 7.1.7. *On peut étendre la formule précédente à l'ouvert $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C}, \; \mathrm{Re}\;\lambda > 0\}$, en utilisant la technique du prolongement analytique.*

La formule donnée dans cet exemple se généralise ainsi : soit une matrice réelle symétrique $A \in \mathcal{S}_\mathrm{d}(\mathbb{R})$ définie positive. Si on considère la densité Gaussienne centrée

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \; G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(A)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)},$$

alors $G_A \in \mathcal{S}$ et on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \; \mathcal{F}(G_A)(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}.$$

Cela s'obtient à partir de la formule que l'on a démontré en diagonalisant A en base orthonormée.

Une des propriétés fondamentales de la transformation de Fourier est qu'elle échange multiplication et dérivation :

Théorème 7.1.8. *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors,*

1. *la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et on a, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,*
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(-\mathrm{i}x_j f)(\xi). \tag{7.4}$$
2. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,*
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\partial_{x_i} f)(\xi) = \mathrm{i}\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi). \tag{7.5}$$

Démonstration. La fonction $(x, \xi) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,
$$|\partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x))| = |-\mathrm{i}x_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)| = |x_j f(x)|$$
et $x \mapsto x_j f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ car $f \in \mathcal{S}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir
$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} -\mathrm{i}x_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x$$
ce qui établit le premier point.
Pour montrer le second point, intégrons pas parties par rapport à x_j :
$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)\mathrm{d}x_j = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\right]_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (\partial_{x_j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}) f(x)\mathrm{d}x_j = \mathrm{i}\xi_j \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x_j$$
car $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_d)$ tend vers 0 lorsque $|x_j| \to +\infty$ puisque $f \in \mathcal{S}$. Puis, comme $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)| = |\partial_{x_j} f(x)|$ et que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, de même que $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$, on peut intégrer l'égalité issue de l'intégration par parties selon les variables autres que x_j pour obtenir, via Fubini,
$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi_j \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x,$$
ce qui prouve le second point. □

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ échange donc dérivation et multiplication par x. Par conséquent, $\mathcal{F}$ échange régularité et décroissance à l'infini : quand nous aurons défini cette transformation sur un espace plus large de fonctions, nous verrons que plus une fonction est dérivable, plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini.

La propriété précédente permet en particulier de démontrer l'invariance de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par $\mathcal{F}$:

Corollaire 7.1.9. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$.*

Démonstration. En itérant le théorème 7.1.8, on obtient que pour tous multiindices α, β, $\mathcal{F}(g)$ est de classe $C^{|\beta|}$ et
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha(x^\beta g(x))|\mathrm{d}x < +\infty.$$
Ceci implique facilement que $\mathcal{F}(g)$ est un élément de $\mathcal{S}$ et, en utilisant la formule de Leibniz et en remarquant que $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|)^{d+1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$:
$$\forall N \geq 0,\ \exists C_N > 0, \quad q_N\left(\mathcal{F}(g)\right) \leq C_N q_{N+d+1}(g).$$
Ceci prouve que $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}$ et que l'application $g \mapsto \mathcal{F}(g)$ est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ par la formule de Leibniz. □

7.1.3 Formule d'inversion de Fourier

À l'aide de la transformée de Fourier de la Gaussienne, nous allons maintenant démontrer le théorème d'inversion de Fourier dans le cadre de la classe de Schwartz.

Théorème 7.1.10. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est une application linéaire bijective, continue et d'inverse continu. Son inverse $\overline{\mathcal{F}}$ est donné par*

$$\forall g \in \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} g(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.6}$$

Remarque 7.1.11. *La formule (7.6) peut s'écrire :*

$$\forall g \in \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(g)(-x).$$

Remarque 7.1.12. *Ce théorème montre en particulier que la transformation de Fourier est bien une bijection de $\mathcal{S}$, comme nous l'avons souhaité lors de sa construction.*

Démonstration. Il nous reste à prouver que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}g = g$ pour tout $g \in \mathcal{S}$. Pour cela il faudrait pouvoir considérer l'intégrale $\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi$. Mais, la fonction $(y,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}^d_y \times \mathbb{R}^d_\xi)$ et on ne peut donc pas intervertir les intégrales par Fubini. On va procéder par approximation. On remarque que, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Or, la fonction $(y,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d_y \times \mathbb{R}^d_\xi)$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut donc lui appliquer le théorème de Fubini et obtenir :

$$I_\varepsilon = \int\left(\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\right)g(y)\mathrm{d}y.$$

D'après la formule (7.3), on a

$$I_\varepsilon = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^d \int \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}}g(y)\mathrm{d}y = \pi^{\frac{d}{2}}2^d\int \mathrm{e}^{-|z|^2}g(x-2\sqrt{\varepsilon}z)\mathrm{d}z.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \pi^{\frac{d}{2}}2^d g(x)\int \mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{d}z = (2\pi)^d g(x).$$

D'où, $\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d g(x)$ et $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$. On montre de même que $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$. □

Il est courant de noter $\check{g}$ la fonction $x \mapsto g(-x)$. Avec cette notation, la relation d'inversion de Fourier s'écrit :

$$\mathcal{F}\mathcal{F}g = (2\pi)^d\check{g}.$$

7.1.4 Théorème de Plancherel

Passons à présent aux propriétés hilbertiennes de la transformation de Fourier. Le théorème de Plancherel montre que cette transformation est une isométrie de L^2 et donc que lorsque l'on passe de l'espace classique à l'espace de Fourier on ne "perd" aucune information du point de vue de l'espace L^2.

Théorème 7.1.13. *Soient f et g dans $\mathcal{S}$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x \tag{7.7}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{7.8}$$

En particulier pour $f = g$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi. \tag{7.9}$$

Démonstration. Le premier point est une application directe de la définition de la transformée de Fourier et du théorème de Fubini. Les fonctions dans l'intégrale double étant dans $\mathcal{S}$, elles sont intégrables.
On applique alors (7.7) aux fonctions f et $h = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\hat{g}}$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{h}(x)\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, par la formule d'inversion de Fourier,

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\overline{\hat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi} = \overline{\overline{\mathcal{F}}\hat{g}(x)} = \overline{g}(x).$$

D'où le résultat.
La dernière identité est alors évidente. □

7.1.5 Convolution

Voyons à présent comment la transformée de Fourier se comporte vis-à-vis des translations avant de voir la relation entre produit de convolution et transformée de Fourier.

Proposition 7.1.14. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Si $\tau_a : x \mapsto x + a$, alors pour toute $f \in \mathcal{S}$, $(\tau_a)_* f = f \circ \tau_{-a}$ a pour transformée de Fourier*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}((\tau_a)_* f)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Réciproquement,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot x} f)(\xi) = (\tau_a)_*(\mathcal{F}(f))(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - a).$$

Démonstration. Pour le premier point, on effectue le changement de variables $z = x - a$ dans l'intégrale de Fourier

$$\mathcal{F}((\tau_a)_* f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x} f(x-a)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot(z+a)} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Le second point découle directement de la définition de la transformée de Fourier. □

Proposition 7.1.15. *Soient f et g dans $\mathcal{S}$. Alors $f \star g \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$. Réciproquement, $\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.*

Démonstration. Rappelons tout d'abord la définition du produit de convolution pour deux fonctions, l'une intégrable et l'autre bornée :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

Cette définition est licite pour f et g dans $\mathcal{S}$. De plus, à y fixé, la fonction $x \mapsto f(y)g(x-y)$ est C^∞ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|\partial_x^\beta(f(y)g(x-y))| = |f(y)(\partial^\beta g)(x-y)| \leq C_{0,\beta}|f(y)|$ en reprenant les notations de la définition de $\mathcal{S}$. Or, $y \mapsto C_{0,\beta}|f(y)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, donc par dérivation sous le signe intégral, $f \star g$ est de classe C^∞ et $\partial^\beta(f \star g) = f \star (\partial^\beta g)$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Comme $x^\alpha = (x-y+y)^\alpha = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma}(x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma}$, on peut écrire

$$x^\alpha \partial^\beta(f \star g) = x^\alpha f \star (\partial^\beta g) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (x^{\alpha-\gamma} f) \star (x^\gamma \partial^\beta g)$$

et cette fonction est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'où $f \star g \in \mathcal{S}$. On peut alors appliquer le théorème de Fubini à la fonction intégrable $(x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$ pour obtenir, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi} g(x-y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi).
\end{aligned}$$

On a donc obtenu le premier point. Pour le second nous allons utiliser la transformée de Fourier inverse. On applique le premier point à $\varphi = \mathcal{F}(f)$ et $\psi = \mathcal{F}(g)$. Alors, $\hat{\varphi} = (2\pi)^d \check{f}$ et $\hat{\psi} = (2\pi)^d \check{g}$ d'où :

$$\mathcal{F}(\varphi\psi)(x) = \mathcal{F}(\hat{f} \cdot \hat{g})(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \star g))(x) = (2\pi)^d (f \star g)(-x).$$

En appliquant la transformation de Fourier aux deux membres de cette égalité, on obtient le second point. □

7.2 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées

Pour pouvoir définir la transformée de Fourier d'une fonction, il nous a fallu contrôler sa croissance à l'infini. C'est la cas pour une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou dans $\mathcal{S}$. Par contre, il n'est pas possible de définir cette transformée pour une fonction seulement localement intégrable. Il en résulte que par dualité, nous n'allons pas pouvoir définir la transformée de Fourier sur tout $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mais seulement sur l'un de ses sous-espaces, celui des distributions dites tempérées.

Définition 7.2.1. *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$, c'est à dire telle que pour toute suite de $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\lim_n \varphi_n = \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} < T, \varphi_n > = < T, \varphi > .$$

Proposition 7.2.2. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors T est une distribution tempérée si et seulement si*

$$\exists k, l \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{S},\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi) \tag{7.10}$$

où les $p_{\alpha,\beta}$ sont définies en (7.2). On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Remarque 7.2.3. *Comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$, toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ définit par restriction une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Cette forme linéaire est bien dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ puisque pour tout compact K, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $C_{K,\alpha} > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans K, $p_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq C_{K,\alpha} \sup_K |\partial^\beta \varphi|$.*
De plus, cette identification à un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est licite car l'application $T \mapsto T|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$ est injective car si $T|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$, alors $T = 0$ sur $\mathcal{S}$ par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}$. On a donc

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Exemple 7.2.4. 1. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, la distribution T_f définie par une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder.*

2. *Toute fonction continue à croissance polynomiale définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$.*
3. *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance polynomiale,* i.e. *telle qu'il existe $p \geq 0$, $a_k = \mathcal{O}(|k|^p)$ lorsque k tend vers l'infini. Alors la distribution sur $\mathbb{R}$,*

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

est tempérée. En effet, il existe $C > 0$ et $p \geq 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \leq C(1 + |k|^{2p})$. Alors, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}|\langle T, \varphi\rangle| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k||\varphi(k)| \leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + k^{2p})|\varphi(k)| \\ &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}(1 + k^2 + k^{2p} + k^{2p+2})|\varphi(k)|\end{aligned}$$

$$\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} \sum_{i\leq 2p+2} p_{i,0}(\varphi)$$

et $C' = C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} < +\infty$.
4. *La distribution définie par la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ n'est pas tempérée. En effet, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0, 2]$ et valant 1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Pour $j \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_j(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \psi\left(\frac{x}{j}\right)$. Alors $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}|x^\alpha \varphi_j^{(\beta)}(x)| &= \left|\sum_{\gamma=0}^{\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left(-\frac{1}{2}\right)^\gamma x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{j^{\beta-\gamma}} \psi^{(\beta-\gamma)}\left(\frac{x}{j}\right)\right| \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \sup_{x\geq 0} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi^{(\beta-\gamma)}(x)| := M_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

Or,

$$\langle T_{\mathrm{e}^\cdot}, \varphi_j\rangle = \int_0^{2j} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \psi\left(\frac{x}{j}\right) \mathrm{d}x \geq \int_{\frac{j}{2}}^{j} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{j}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{j}{2}} - 1) \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc $T_{\mathrm{e}^\cdot}$ n'est pas tempérée.
De même, pour tout $\varepsilon > 0$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\varepsilon|x|} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
5. *Toutefois, pour appartenir à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il n'est pas nécessaire d'être majoré par un polynôme. Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$. Alors $|f(x)| = \mathrm{e}^x$, mais $f(x) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$ et*

$$\int f(x)\varphi(x)\, dx = \int \frac{1}{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}\right) \varphi(x)\, dx = -\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x} \varphi'(x)\, dx,$$

par une intégration par parties élémentaire. On en déduit

$$\left| \int f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \sup_x |\varphi'(x)|,$$

ce qui montre que f définit bien une dérivation tempérée. Intuitivement, ce sont les oscillations rapides de la fonction qui compensent le comportement exponentiel (donc non tempéré) du module de la fonction.

Une dernière classe importante d'exemples est donnée par les distributions à support compact. On rappelle qu'une telle distribution définit une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞.

Proposition 7.2.5. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors la restriction de T à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une distribution tempérée.*

Démonstration. Il est évident que cette restriction est linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il reste à vérifier la continuité. Cette dernière découle immédiatement de la continuité de l'injection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$: si $(\varphi_n)_n$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $(\varphi_n)_n$ converge également vers φ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. □

Voyons à présent les liens entre opérations sur les distributions et distributions tempérées.

Proposition 7.2.6. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

1. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\partial_{x_j} T$ et $x_j T$ sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donc, si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $P\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Soit f une fonction C^∞ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées i.e.*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \exists C > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C(1+|x|)^N.$$

Alors $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Nous terminons cette section par la définition de la notion de convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 7.2.7. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions tempérées converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle.$$

Tout comme dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la convergence est compatible avec les opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées. En revanche, on prendra bien garde au fait que la convergence au sens des distributions n'implique pas la convergence au sens des distributions tempérées. Par exemple, si $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est non nulle et f_n est définie par

$$f_n(x) = \psi(x-n)e^{n^4}$$

est telle que T_{f_n} tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, mais n'a pas de limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Remarquons qu'elle tend aussi vers 0 dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (mais bien sûr ni dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ni dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

7.3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

7.3.1 Définition et propriétés

Nous avons déjà démontré au théorème 7.1.13 que pour toute paire de fonctions f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(g)(x)\mathrm{d}x. \tag{7.11}$$

Cette identité nous suggère de définir de manière analogue la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Définition 7.3.1. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de T, notée $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$ est la distribution tempérée définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle.$$

Le fait que la transformation de Fourier soit une distribution tempérée découle du fait de $\mathcal{F}$ est une application continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: si $\lim_n \varphi_n = \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\lim_n \hat{\varphi}_n = \hat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc

$$\lim_n < \mathcal{F}(T), \varphi_n >= \lim_n < T, \hat{\varphi}_n >=< T, \hat{\varphi} >=< \mathcal{F}(T), \varphi > .$$

D'après (7.11), la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec celle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour une distribution tempérée de la forme T_f avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On définit de manière analogue la transformation $\overline{\mathcal{F}}$.

Appliquer la transformée de Fourier à une distribution tempérée revient à l'appliquer à des fonctions tests dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il est donc naturel que toutes les propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se transposent au cadre des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 7.3.2. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}:\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire, continue, bijective et de réciproque continue. De plus, $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. La transformation de Fourier est bien sûr linéaire.

Le caractère bijectif de la transformation de Fourier et la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'$ sont conséquences du théorème 7.1.10. En effet, on a, pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle = \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$. Puis, si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \mathcal{F}T_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \mathcal{F}\varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle,$$

ce qui montre que $\mathcal{F}(T_n)$ converge vers $\mathcal{F}(T)$ dans $\mathcal{S}'$, et donc que $\mathcal{F}$ est une application continue de $\mathcal{S}'$ dans lui-même. De même pour $\overline{\mathcal{F}}$, la réciproque de $\mathcal{F}$. □

Proposition 7.3.3. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a :*

1. *$\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^d \check{T}$, où pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*
2. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(\partial_{x_j} T) = \mathrm{i}\xi_j \mathcal{F}T$.*
3. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(x_j T) = \mathrm{i}\partial_{\xi_j} \mathcal{F}T$.*
4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$, $\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot\xi} \mathcal{F}T$.*
5. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\cdot x} T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a$.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate du théorème 7.3.2. Les deuxièmes et troisièmes points sont directement obtenus à partir des résultats du théorème 7.1.8. Les quatrièmes et cinquièmes points sont une conséquence de la proposition 7.1.14. □

Pour le moment, nous ne traduisons pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ les relations entre transformée de Fourier et convolution données dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 7.3.4. 1. *On a $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. En effet,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S},\ \langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}\varphi \rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \int \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle.$$

2. *En combinant avec la translation τ_a, on obtient, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}\delta_a)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}$.*
3. *On a $\mathcal{F}1 = (2\pi)^d\delta_0$. En effet, $\mathcal{F}1 = \mathcal{F}\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^d\check{\delta}_0 = (2\pi)^d\delta_0$.*
4. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$. Alors :*

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_0)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \ \textit{ et } \ (\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_a)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}.$$

   Cela découle directement de la proposition 7.3.3.

5. *Soit $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrons tout d'abord que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour cela, on écrit*

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) = V_1 + V_2,$$

   où les distributions V_1 et V_2 sont définies par

$$< V_1, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx \quad \textit{et} \quad < V_2, \varphi >= \int_{|x|>1}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.$$

   La distribution V_1 est à support compact, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La distribution V_2 est T_f, où $f(x) = \mathbb{1}_{|x|\ge 1}\frac{1}{x}$. Puisque f est dans $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit $V_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{S}'$ est un espace vectoriel, on en déduit $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

   Donc, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Calculons alors $\hat{T}$. On part de l'égalité $xT = 1$. Alors, $\mathcal{F}(xT) = 2\pi\delta_0$ soit encore $\mathrm{i}\partial_\xi\hat{T} = 2\pi\delta_0$. Par intégration, si H désigne la distribution de Heaviside, il existe $C \in \mathbb{R}$, $\hat{T} = -2\mathrm{i}\pi H + C$. Or, comme T est impaire, $\hat{T}$ aussi et $-2\mathrm{i}\pi + C = -C$ soit encore $C = \mathrm{i}\pi$. On obtient donc

$$\mathcal{F}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = -2\mathrm{i}\pi H + \mathrm{i}\pi.$$

6. *On reprend les notations de l'exemple précédent. Alors, $\mathcal{F}\mathcal{F}T = 2\pi\check{T} = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, $-2\mathrm{i}\pi\mathcal{F}H + \mathrm{i}\pi 2\pi\delta_0 = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit que*

$$\mathcal{F}H = -\mathrm{i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0.$$

7.3.2 Retour sur la transformation de Fourier dans L^1 et dans L^2

On fait ici le lien entre la transformation de Fourier au sens des distributions et la théorie classique de la transformation de Fourier.

Théorème 7.3.5. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier au sens classique :*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}f(x)\,dx.$$

Alors

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\hat{f}}.$$

Remarque 7.3.6. *Dans le théorème précédent, $\mathcal{F}(T_f)$ désigne la transformée de Fourier au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de l'élément T_f de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Le théorème signifie que la transformation de Fourier au sens classique et la transformée de Fourier au sens des distributions coïncident.*

Démonstration. Remarquons que $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée, donc $T_{\hat{f}}$ est bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$< T_{\hat{f}}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

La fonction $(x,\xi) \mapsto f(x)\varphi(\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{2d}$. Par le théorème de Fubini,

$$< T_{\hat{f}}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x = \left\langle T_f, \hat{\varphi}\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\right\rangle,$$

ce qui montre le résultat annoncé. □

On passe maintenant à l'étude de la transformation de Fourier dans L^2. On rappelle que les éléments de L^2 définissent des distributions tempérées, et donc que leur transformation de Fourier est bien définie.

Théorème 7.3.7 (Théorème de Plancherel)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}(T_f) = T_g$. De plus,*

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|g\|_{L^2}.$$

En pratique, on identifie f à T_f, T_g à g et on note donc $g = \hat{f}$. Avec ces conventions, le théorème précédent s'énonce alors :

"Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\hat{f}\|_{L^2}$."

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Alors

$$\left\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\right\rangle = \int f(x)\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis le théorème de Plancherel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left|\left\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\right\rangle\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\hat{\varphi}\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}.$$

La forme linéaire $\varphi \mapsto \left\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\right\rangle$, définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est donc continue pour la topologie de L^2. Puisque $\mathcal{S}$ est dense dans L^2, on peut la prolonger de manière unique en une forme linéaire continue sur L^2, dont la norme d'opérateur est au plus $(2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2}$. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \left\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

On a donc montré $\mathcal{F}(T_f) = T_g$. Le raisonnement précédent montre aussi l'inégalité : $\|g\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2}$. En appliquant ce résultat à la fonction g, on obtient qu'il existe $h \in L^2$ tel que $\mathcal{F}(T_g) = T_h$ et $\|h\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|g\|_{L^2}$. Par le théorème d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'$, on a en fait $h(x) = (2\pi)^d f(-x)$, et l'inégalité précédente s'écrit : $(2\pi)^d\|f\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|g\|_{L^2}$, ce qui termine la preuve. □

Exercice 7.3.8. *Calculer la transformation de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,+1]}$. En déduire*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

7.3.3 Transformée de Fourier des distributions à support compact

On rappelle que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Nous pouvons donc voir ce que l'on obtient lorsque l'on applique la transformée de Fourier à une distribution à support compact. La décroissance à l'infini étant maximale pour une telle distribution, on s'attend à obtenir une régularité maximale.

Théorème 7.3.9. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $e_\xi : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. La distribution tempérée $\mathcal{F}T$ est la distribution associée à la fonction $\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi}\rangle$. Cette fonction, notée $\xi \mapsto \mathcal{F}T(\xi)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et est à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées.*

La démonstration utilise des résultats de dérivation et d'intégration sous le crochet.

Chapitre 8

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on donne deux exemples d'étude d'équations aux dérivées partielles par la théorie des distributions et la transformation de Fourier. La première partie du chapitre est consacrée à l'équation elliptique $-\Delta u + u = f$, la deuxième partie à l'équation de la chaleur.

8.1 Étude d'une équation elliptique

8.1.1 Résolution de l'équation par la transformation de Fourier

On considère l'équation

$$(1-\Delta)u = f, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{8.1}$$

Le symbole Δ désigne le laplacien sur $\mathbb{R}^d$:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{(\partial x_j)^2}.$$

Le second membre f est donné dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. L'inconnue est la distribution u. On a alors le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 8.1.1. *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de l'équation* (8.1) *au sens des distributions.*

Remarque 8.1.2. *La condition $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ doit être vue comme une restriction sur la croissance de u à l'infini. Elle est importante pour l'unicité de la solution. Par exemple, lorsque $d = 1$, et $f = 0$, l'équation devient*

$$-u'' + u = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation dans C^2 est un espace vectoriel de dimension 2, qui a une base formée des deux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$. Le seul élément de cet espace vectoriel qui est également dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la fonction constante nulle.

Démonstration. On prend la tranformée de Fourier des deux membres de l'équation (8.1). On voit que cette équation est équivalente à :

$$(1+|\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}, \tag{8.2}$$

où
$$|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{d} \xi_j^2.$$
La fonction C^∞ $\xi \mapsto \frac{1}{1+|\xi|^2}$ est à croissance lente à l'infini. La multiplication par cette fonction est donc une application continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En multipliant l'équation (8.2) par cette fonction, on voit que (8.1) est équivalente à l'équation :
$$\hat{u} = \frac{1}{(1+|\xi|^2)}\hat{f},$$
ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution. On a aussi obtenue une formule pour cette solution :
$$u = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)}\hat{f}\right),$$
où $\overline{\mathcal{F}}$ est la transformation de Fourier inverse sur $\mathbb{R}^d$. □

Remarque 8.1.3. *La méthode de résolution précédente fonctionne pour toute équation aux dérivées partielles de la forme :*
$$P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_d}\right) u = f,$$
où $P(\xi_1, \dots, \xi_d)$ est un polynôme de d variable qui vérifie ;
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad P(\xi) \neq 0.$$

Exemple 8.1.4. *Lorsque f est la fonction constante égale à C, l'unique solution de* (8.1) *dans $\mathcal{S}'$ est la fonction constante égale à C.*

Plus généralement, si $f = x^\alpha$, on a $\hat{f} = i^{|\alpha|}(2\pi)^d \partial_\xi^\alpha \delta_0$. La solution u de l'équation (8.1) *vérifie donc*
$$\hat{u} = \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^d(1+|\xi|^2)}\partial_\xi^\alpha \delta_0.$$
Avec la formule de Leibniz, on peut montrer que $\frac{1}{(1+|\xi|^2)}\partial_\xi^\alpha \delta_0$ est une combinaison linéaire de $\partial_\xi^\beta \delta_0$, $\beta \leq \alpha$, le coefficient de ∂_ξ^α étant $\frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^d}$. Donc u est une fonction polynôme de d variables, dont le terme de plus haut degré est x^α.

Exemple 8.1.5. *On suppose maintenant $d = 1$ et $f = \delta_0$. La restriction de u à $]0, +\infty[$ et à $]-\infty, 0[$ est donc solution de $-u'' + u = 0$. En résolvant l'équation sur ces deux intervalles, on obtient :*
$$u(x) = \frac{1}{2}\left(e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0[} + e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right).$$
On dit que u est la solution élémentaire *de l'équation* (8.1).

Exemple 8.1.6. *Lorsque $d = 1$ et f est la fonction de Heaviside $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$, on obtient (en intégrant par exemple la solution obtenue dans l'exemple précédent) :*
$$u(x) = \frac{1}{2}\left(e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0[} - e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right) + \mathbb{1}_{]0,+\infty[}.$$

Dans les deux exemples précédents, la solution u est plus régulière que le second membre f. Dans l'exemple 8.1.5, le second membre est la distribution δ_0, qui n'est pas une fonction, alors que la solution est une fonction continue. Dans l'exemple 8.1.6, le second membre est une fonction non-continue, la solution est une fonction de classe C^1. Ce gain de régularité est en fait une propriété fondamentale de l'équation (8.1). On peut le mesurer dans une classe d'espace de Hilbert, qui sont un cas particulier des espaces de Sobolev.

8.2 Espaces de Sobolev

Définition 8.2.1. *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des éléments u de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tels que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 8.2.2. *L'espace H^s est un espace de Hilbert.*

Démonstration. L'espace H^s, muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^s} = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

est bien un espace pré-hilbertien. L'espace H^s est isométrique à $L^2(\mathbb{R}^d)$, l'application

$$u \mapsto \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}\hat{u}(\xi)$$

étant, d'après le théorème de Plancherel et à une constante multiplicative près, une isométrie de H^s dans L^2. La complétude de H^s découle alors de la complétude de L^2. □

Le paramètre $s \in \mathbb{R}$ mesure la régularité des éléments de H^s. On a :

$$s < \sigma \Longrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d).$$

Lorsque s est entier, l'espace H^s est l'ensemble des éléments de L^2 dont toutes les dérivées d'ordre au plus s sont également dans L^2 :

Théorème 8.2.3. *Supposons $s \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$H^s\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \le s \Rightarrow \partial_x^\alpha u \in L^2\right\}.$$

Démonstration. Supposons d'abord $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \le s$. On a alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad |\xi^\alpha| = \left|\prod_{j=1}^d \xi_j^{\alpha_j}\right| \le |\xi|^{|\alpha|} \le |\xi|^s + 1.$$

(Pour montrer la dernière inégalité, distinguer les cas $|\xi| \le 1$ et $|\xi| \ge 1$). En utilisant $\widehat{\partial_x^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \hat{u}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \le C\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^s)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

On a montré $\widehat{\partial_x^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et donc, par le théorème de Plancherel 7.3.7, $\partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Réciproquement, supposons $\partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \le s$. En utilisant l'inégalité :

$$\forall (a_j)_{0\le j\le d} \in \mathbb{R}_+^{d+1}, \quad \left(\sum_{j=0}^d a_j\right)^{s/2} \le (d+1)^{s/2} \sup_{0\le j\le d} a_j^{s/2} \le (d+1)^{s/2}\sum_{j=0}^d a_j^{s/2},$$

on obtient

$$\left(|\xi|^2+1\right)^{s/2} = \left(1+\sum_{j=1}^d |\xi_j|^2\right)^{s/2} \le (d+1)^{s/2}\left(1+\sum_{j=1}^d |\xi_j|^s\right),$$

et un raisonnement analogue à celui du précédent montre que u est dans H^s. □

Le théorème suivant est un cas particulier des *injections de Sobolev*.

Théorème 8.2.4. *Si $s > \frac{d}{2} + k$, alors $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$. De plus, u ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à s sont bornées et tendent vers 0 à l'infini.*

Ainsi, un élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre N sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, où $N > d/2 + k$, est en fait de classe C^k.

Démonstration. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2}$. On a

$$\hat{u}(\xi) = (1 + |\xi|)^{-s/2}(1 + |\xi|)^{s/2}\hat{u}(\xi). \tag{8.3}$$

Or $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{s/2}\hat{u}$ (car $u \in H^s$) et $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ce dernier point se démontre aisément en passant en coordonnées polaires, ou en utilisant l'inégalité :

$$(1 + |\xi|)^{-s/2} \leq \prod_{j=1}^{d}(1 + |\xi_j|)^{-s/2d},$$

puis par Fubini-Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^d}(1 + |\xi|)^{-s/2}\mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}(1 + |\xi_j|)^{-\frac{s}{2d}}\mathrm{d}\xi \leq \prod_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}}(1 + |\xi_j|)^{-\frac{s}{2d}}\mathrm{d}\xi_j,$$

qui donne bien une quantité finie par le critére de Riemann, car $\frac{s}{2d} > 1$.
En revenant à (8.3), on obtient par Cauchy-Schwarz, $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformation de Fourier inverse montre alors que u est continue, bornée, et tend vers 0 à l'infini.
On a montré la conclusion du théorème lorsque $k = 0$. Le cas général s'en déduit en appliquant le cas $k = 0$ à $\partial_x^\alpha u$, $|\alpha| \leq k$. □

Les deux théorèmes précédents concerne des indices s positifs, pour lesquels H^s est inclus dans L^2. Lorsque $s < 0$, H^s comprend des éléments qui ne sont pas des fonctions. La masse de Dirac est un exemple de distribution tempérée, n'appartenant pas à L^1_{loc} est qui est dans des espaces de Sobolev d'indices négatifs :

$$\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) \iff s < -d/2.$$

La proposition suivante, qui exprime, pour les solutions de l'équation (8.1), un gain de régularité de 2 dérivées sur l'échelle des espaces de Sobolev, découle immédiatement de la définition de ces espaces.

Proposition 8.2.5. *Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ la solution de l'équation elliptique* (8.1). *Alors $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$.*

8.3 Introduction rapide à l'équation de la chaleur

On s'intéresse maintenant à l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u_{\restriction t=0} = u_0. \end{cases} \tag{8.4}$$

L'inconnue u est définie sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d$, et on note (t, x) la variable dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d$, avec $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Le symbole Δ désigne le laplacien (ou opérateur de Laplace) par rapport à la variable x :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2.$$

La variable t s'interprète comme une variable de temps, la variable x comme une variable d'espace. La fonction (ou distribution) u_0, définie sur $\mathbb{R}^d$, est donnée. C'est la *condition initiale* de u à $t = 0$. L'équation de la chaleur (8.4) est une équation d'évolution qui détermine, à partir de la condition initiale u_0, l'état du système pour tout temps positif. Elle modélise l'évolution de la température dans l'espace en l'absence de source de chaleur extérieure, mais également de nombreux processus de *diffusion*. Elle apparaît notamment (ainsi que ses variantes plus compliquées) dans l'étude du mouvement brownien et en finances mathématiques pour la modélisation des options.

Nous commencerons par faire un calcul formel (c'est à dire sans aucune justification rigoureuse) pour obtenir deux expressions simples de la solution. [1] Nous montrerons ensuite que ces expressions simples donnent bien, dans certains cas, des solutions de (8.4).

8.3.1 Calcul formel

On notera $\hat{f}$ la transformation de Fourier par rapport à la variable d'espace x. En particulier, si $t \geq 0$, $\hat{u}(t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto u(t,x)$. En prenant (formellement, comme annoncé), la transformée de Fourier de l'équation (8.4) on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t,\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \\ \hat{u}_{\restriction t=0}(\xi) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{8.5}$$

L'équation précédente peut-être vue comme une famille d'équations différentielles ordinaires linéaires, dépendant du paramètre ξ. On résout chacune de ces équations, ce qui donne

$$\hat{u}(t) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0. \tag{8.6}$$

Remarquons que (8.6) a un sens pour tout $t > 0$, dès que $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En supposant que l'on peut utiliser la tranformation de Fourier inverse, à $t > 0$ fixé (il suffit pour cela que $e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0$ soit intégrable), on obtient :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(t,\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix\cdot\xi - t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

En utilisant la définition intégrale de la transformation de Fourier de u_0 (ce qui n'est possible, a priori, que si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mais rappelons que nous ne faisons qu'un calcul formel préliminaire), on obtient :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} u_0(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi.$$

En inversant l'ordre d'intégration :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int u_0(y) \int e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y.$$

L'intégrale $\int e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} \mathrm{d}\xi$ est la transformée de Fourier de la gaussienne $\xi \mapsto e^{-t|\xi|^2}$, prise au point $y - x$. Nous avons calculé cette transformée de Fourier en §7.1.2 (cf (7.3)) :

$$\int u_0(y) \int e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} \mathrm{d}\xi = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

On en déduit la formule :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d} \int u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \mathrm{d}y. \tag{8.7}$$

1. Prudence : l'article définie "la" sous-entend que la solution de (8.4) est unique, ce que nous n'avons pas démontré, et est faux en toute généralité

Exemple 8.3.1. *Les deux formules* (8.6) *et* (8.7) *donne $u(t,x) = C$ lorsque u_0 est la fonction constante égale à C.*

On justifie maintenant les calculs formels précédents.

8.3.2 Solution au sens des distributions

Soit $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et pour tout t, $\hat{u}(t)$ défini par (8.6). En d'autres termes, en notant $\overline{\mathcal{F}}$ la transformée de Fourier inverse sur $\mathbb{R}^d$,

$$u(t) = \overline{\mathcal{F}}\left(e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0\right). \tag{8.8}$$

On peut identifier u à une distribution sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ en posant, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$< u, \varphi >= \int_0^\infty \left\langle \overline{\mathcal{F}}\left(e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0\right), \varphi\right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left\langle e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0, \overline{\mathcal{F}}\varphi\right\rangle \mathrm{d}t,$$

où les crochets $\langle\cdot,\rangle$ désignent dans le membre de gauche de l'égalité, la dualité

$$\mathcal{D}'(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d),\ \mathcal{D}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d),$$

et dans les deux autres membres, la dualité entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On montre facilement, en utilisant que u_0 est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, que cette formule définit bien une distribution.

Théorème 8.3.2. *La distribution $u(t)$ définie par* (8.8) *vérifie l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$ au sens des distributions sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. De plus,*

$$\lim_{t\to 0^+} u(t) = u_0$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 8.3.3. *La limite annoncée dans le théorème signifie simplement que*

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{t\to 0^+}\langle u(t),\varphi\rangle = \langle u_0,\varphi\rangle. \tag{8.9}$$

Remarque 8.3.4. *Le théorème montre l'existence de la solution. On peut aussi démontrer, avec des hypothèses convenables, un théorème d'unicité de la solution dans $\mathcal{S}'$. Nous n'aborderons pas de problème (pourtant très important !) ici.*

Démonstration. On commence par montrer (8.9) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle u(t),\varphi\rangle = \left\langle \hat{u}_0, e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\varphi\right\rangle.$$

On montre

$$\lim_{t\to 0^+} e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \overline{\mathcal{F}}\varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{8.10}$$

En effet, notons $\psi = \overline{\mathcal{F}}\varphi$. Par la formule de Leibniz, pour tout multi-indice α,

$$\partial_\xi^\alpha\left(e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi) - \psi(\xi)\right) = \left(e^{-t|\xi|^2} - 1\right)\partial_\xi^\alpha\psi(\xi) + \sum_{\alpha<\beta}\binom{\alpha}{\beta}\partial_\xi^{\alpha-\beta}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)\partial_\xi^\beta\psi(\xi).$$

On a :

$$\left|\left(e^{-t|\xi|^2} - 1\right)\partial_\xi^\alpha\psi(\xi)\right| \le t|\xi|^2\left|\partial_\xi^\alpha\psi(\xi)\right|,$$

par l'inégalité élémentaire $|e^{-x}-1| \leq x$ pour $x > 0$. De plus, lorsque $\beta < \alpha$

$$\partial_\xi^{\alpha-\beta}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)\partial_\xi^\beta\psi(\xi) = tP_{\alpha-\beta}(t,\xi)e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi),$$

où $P_{\alpha-\beta}$ désigne une fonction polynôme en les variables t, ξ_1, …, ξ_d, de degré maximal $|\alpha-\beta| = |\alpha|-|\beta| \leq |\alpha|$ en $\xi_1,\ldots,\xi_d$. On déduit des deux observations précédentes que pour tout $N \geq 0$,

$$q_N\left(e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi)-\psi(\xi)\right) \leq tq_{N'}(\varphi(\xi)),$$

où $N' = \max(N+2, 2N)$ (cf (7.2) pour la définition de q_N). En particulier

$$\lim_{t\to\infty} q_N\left(e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi)-\psi(\xi)\right) = 0,$$

ce qui montre (8.10) et donc

$$\lim_{t\to 0^+}\langle u(t),\varphi\rangle = \langle \hat{u}_0, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle u_0,\varphi\rangle .$$

On montre maintenant que u vérifie l'équation de la chaleur au sens des distributions sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$. Alors

$$< \partial_t u - \Delta u, \chi > = < u, -\partial_t\chi - \Delta\chi > .$$

De plus :

$$\begin{aligned}\langle u, -\Delta\chi\rangle = \int_0^\infty \left\langle e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0, \overline{\mathcal{F}}(-\Delta\chi)\right\rangle \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \left\langle e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0, |\xi|^2\overline{\mathcal{F}}\chi\right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left\langle \hat{u}_0, e^{-t|\xi|^2}|\xi|^2\overline{\mathcal{F}}\chi\right\rangle \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le lecteur attentif aura remarqué que là encore, les crochets désignaient dans certains cas (lesquels ?) la dualité entre $\mathcal{D}'(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$, et $\mathcal{D}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$, et dans d'autres, la dualité entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus $\hat{}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ désignent respectivement la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse *sur* $\mathbb{R}^d$. On a donc

$$\langle u, -\partial_t\chi-\Delta\chi\rangle = \int_0^\infty \left\langle \hat{u}_0, e^{-t|\xi|^2}|\xi|^2\overline{\mathcal{F}}\chi - e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\partial_t\chi\right\rangle = \int_0^\infty \left\langle \overline{u}_0, -\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\chi\right)\right\rangle .$$

On utilise alors la propriété suivante :

Lemme 8.3.5. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\frac{d}{dt}\langle T, \psi(t,\cdot)\rangle = \left\langle T, \frac{d\psi}{dt}(t,\cdot)\right\rangle .$$

Par le lemme (dont nous différons la démonstration),

$$\int_0^\infty \left\langle \overline{u}_0, \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\chi\right)\right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left\langle \overline{u}_0, \left(e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\chi\right)\right\rangle \mathrm{d}t = 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

Ébauche de preuve du lemme 8.3.5. Par la linéarité de T,

$$\frac{d}{dt}\langle T, \psi(t)\rangle = \lim_{h\to 0}\left\langle T, \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}\right\rangle,$$

et il reste à montrer

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} = \frac{\partial\psi}{\partial t}(t),$$

au sens de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ce que l'on peut faire en utilisant la formule

$$\frac{\psi(t+h,x)-\psi(t,x)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial t}(t+h\sigma,x)\mathrm{d}\sigma.$$

□

8.3.3 Noyau de la chaleur

On s'intéresse maintenant à la formule (8.7) que l'on rappelle ici :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d}\int u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\mathrm{d}y. \tag{8.11}$$

Remarquons que l'on peut interpréter cette formule comme une convolution par un noyau régularisant :

$$y(t,x) = u_0 * \frac{1}{(\sqrt{t})^d}k\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right),$$

où

$$k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{-|x|^2/4}.$$

la fonction

$$(t,x)\mapsto \frac{1}{(\sqrt{t})^d}k\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

est appelée *noyau de la chaleur*.

Théorème 8.3.6. *Soit $p\in[1,\infty)$ et $u_0\in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors la formule* (8.11) *définit une fonction u de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$, qui vérifie l'équation de la chaleur (au sens classique) sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$. De plus :*

$$\lim_{t\to 0^+}\|u(t)-u_0\|_{L^p} = 0. \tag{8.12}$$

Le résultat reste vrai en prenant $p=\infty$, en supposant de plus u_0 continue.

Ébauche de preuve. La preuve de la convergence (8.12) est similaire à la preuve de la densité des fonctions C_0^∞ dans L_c^p par convolution, disponible au début de ce cours (Tome I). Dans cette preuve, le noyau gaussien k est remplacé par une fonction pic à support compact. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que la démonstration fonctionne encore, avec de petites adaptations, dans le cas du noyau gaussien.

La preuve que u vérifie l'équation de la chaleur utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral. On prendra bien soin à se limiter à un ensemble compact $t\in[a,b]$, $|x|\le A$, où $0<a<b<\infty$ et $A>0$, pour obtenir les hypothèses exactes de ce théorème. □

On remarque l'effet régularisant très fort de l'équation de la chaleur : la solution est C^∞ pour tous les temps strictement positifs, même si la condition initiale n'est pas continue !

Une autre propriété intéressante de l'équation de la chaleur se lit sur la formule (8.11) :

Proposition 8.3.7. *Soit $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive non identiquement nulle. Alors*

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u(t,x) > 0.$$

On en déduit également le principe du maximum :

Proposition 8.3.8. *Supposons $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^d)$, bornée. Alors*

$$\sup_{\substack{t \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} u(t,x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u_0(x).$$

Si cette borne supérieure est un maximum, elle est atteinte en $t = 0$.