École Sup Galilée **2020-2021**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.
a. Minorer $| < T, \varphi_n > |$.
b. En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.
3. Déterminer le support de T.

Exercice 3 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

existe.
3. Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
4. En considérant φ_n comme à l'exercice 1, montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 4

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right) \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right)$$

existent.
3. En déduire que l'expression

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x$$

définit une distribution T dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire. Donner l'ordre de T.

Exercice 5

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$< T, \varphi >= \int_0^\infty \big(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer le support de T.

Exercice 6

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ telle que $T_f = \delta_{x_0}$.
Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 7 de la Feuille 1.

Exercice 7 - Distribution d'ordre infini

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$< T, \varphi >= \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre infini.

Exercice 8 - Partie finie de x^α

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
1. Pour $\alpha \in]-2, -1[$, montrer que :

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite lorsque ε tend vers 0^+.
2. On pose : $< \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 9

Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ u(tx) = t^{-n}\ u(x).$$

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x|\geq\varepsilon} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \tag{1}$$

Indication : Passer en coordonnées polaires $(r,\omega) \in]0,+\infty[\times S^{n-1}$ *pour* $|x| \geq \varepsilon$. *Puis utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* 1.

2. On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que T définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre au plus 1.

Exercice 10 - Partie finie de $||x||^{-a}$

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour $a > 0$, montrer qu'il existe un polynôme en ε, $I(\varepsilon)$, tel que la limite :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{||x||\geq\varepsilon} ||x||^{-a}\varphi(x)\ \mathrm{d}x + I(\varepsilon)\right)$$

existe et soit finie.

Indication : on utilisera les coordonnées polaires ainsi que la formule de Taylor à un ordre adéquat.

2. On pose : $< \mathrm{pf}(||x||^{-a}), \varphi >$ la limite précédente. Montrer que $\mathrm{pf}(||x||^{-a})$ est une distribution d'ordre au plus $[a-d]+1$.