École Sup Galilée **2020-2021**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Feuille de TD 4 : Distributions tempérées - Transformée de Fourier

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$.
1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |P(x)|$.

2. Montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

3. Montrer que S définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ < S, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2
Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ associées aux fonctions suivantes:

$$1.\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\ (a \in \mathbb{R}), \quad 2.\ \cos(x), \quad 3.\ x\sin(x), \quad 4.\ \frac{\sin(x)}{x}$$

$$5.\ \mathrm{e}^{-a|x|}\ (a > 0), \quad 6.\ |x|\mathrm{e}^{-a|x|}\ (a > 0), \quad 7.\ \sin(|x|).$$

Exercice 3

1. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

2. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $y' + y = \delta_0$ où $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ désigne la distribution de Dirac en 0.

3. Montrer qu'il existe une unique distribution tempérée $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que l'on déterminera explicitement, solution de l'équation différentielle $y' + y = \delta_0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une unique distribution tempérée $u_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle
$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' + u_\varepsilon = \delta_0.$$

5. Montrer que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u_0 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives.

Exercice 4 - Principe d'incertitude de Heisenberg
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de norme $||f||_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. On veut montrer l'inégalité suivante :

$$(1) := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right) \geq \frac{1}{4}.$$

1. En utilisant la relation $\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi)$, montrer que

$$(1) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\mathrm{d}x\right).$$

2. En déduire que $(1) \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2$.

3. Justifier que pour deux nombres complexes a et b, on a $|ab| \geq \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|f(x)|^2 = f(x)\overline{f'(x)} + \overline{f(x)}f'(x)$.

4. Déduire l'inégalité recherchée des questions 2 et 3. Interprétez cette inégalité en termes probabilistes.

Exercice 5
Soit $P(\xi)$ un polynôme dans $\mathbb{R}^n$ non identiquement nul. On note $P(D)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants associé. Montrer que si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P(D)u = 0$, alors $u = 0$.

Exercice 6
On notera dans ce qui suit δ_a la distribution de Dirac au point a. On définit par récurrence la suite de distributions $(T_k)_{k\geq1}$ par :

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \text{ et } \forall k \geq 2,\ T_k = T_{k-1} \star T_1.$$

1. Écrire T_k comme combinaison linéaire finie de distributions à supports ponctuels.

2. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{T_k}$ de la distribution à support compact T_k.

3. Pour $k \geq 1$, on pose $f_k(\xi) = \widehat{T_k}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_k)_{k\geq1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

4. On note g_k la distribution dont f_k est la transformée de Fourier. Montrer que la suite $(g_k)_{k\geq1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

Indication : On pourra utiliser le fait que, pour $a > 0$, $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-ax^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.