

UNE INTRODUCTION RAPIDE À L'ANALYSE DE FOURIER

THOMAS DUYCKAERTS

Ces notes sont tirées d'un mini-cours de 6 heures donné au DMA début septembre 2024. Elles suivent le cours, à l'exception de la démonstration de la proposition I.17 (compacité locale du groupe dual d'un groupe), qui a été rajoutée. C'est une version provisoire, en cours d'amélioration.

La théorie des séries de Fourier et de la transformation de Fourier trouve ses sources dans l'étude d'équations aux dérivées partielles: l'équation de la chaleur et celle des cordes vibrantes (équation des ondes en dimension 1). L'idée est de décomposer une fonction en somme ou intégrale de fonctions trigonométriques oscillant chacune à une fréquence différente, permettant ainsi de considérer le problème traité à fréquence fixe. Ces idées apparaissent déjà dans les travaux de plusieurs mathématiciens aux 18ème siècle. Joseph Fourier, qui a introduit ces objets dans un mémoire sur l'équation de la chaleur en 1822, a donné son nom à la théorie.

Les développements ultérieurs de la théorie ont donné naissance à un domaine de l'analyse mathématique, l'analyse harmonique. Ceci a notamment permis de généraliser les transformations introduites par Fourier. Nous commencerons par illustrer ce point de vue général, qui consiste à se placer sur un groupe abélien localement compact G . On peut construire un groupe dual $\widehat{G}$ de ce groupe G . La transformation de Fourier associe à une fonction f sur G une fonction $\widehat{f}$ sur $\widehat{G}$. Les propriétés de f (régularité, décroissance à l'infini si le groupe est non compact...) se traduisent par des propriétés de $\widehat{f}$, occasionnant un nouveau point de vue très fécond sur les fonctions définies sur G . La théorie classique de Fourier couvre les cas $G = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ (les séries de Fourier qui permettent d'analyser les fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$), et $G = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$) (la transformation de Fourier proprement dit). Nous aborderons ces deux exemples après un aperçu de la théorie générale. Un autre cas intéressant, notamment pour les applications au traitement du signal et à l'arithmétique, est celui d'un groupe fini G , qui sera abordé, en guise d'illustration dans ce premier chapitre.

Ce cours de 6 heures est une présentation très rapide de la théorie de Fourier. Le but est de donner les grandes idées de la théorie, et de les illustrer dans 3 cas importants, la transformation de Fourier discrète (sur les groupes finis), les séries de Fourier et la transformation de Fourier proprement dite (sur l'espace euclidien). Le cas général n'est donné qu'à titre d'illustration, plusieurs démonstrations étant omises.

I. THÉORIE GÉNÉRALE, EXEMPLE DES GROUPES FINIS

Dans cette première partie, on esquisse la théorie générale de la transformation de Fourier et on l'illustre par l'exemple de la transformation de Fourier sur les groupes finis. Pour les détails, le lecteur intéressé pourra consulter [7] ou [2].

1.1. Groupes abéliens localement compacts, groupe dual.

1.a. *Définition.* On rappelle qu'un espace topologique X est dit *séparé* lorsque pour tout couple (x, y) de points distincts de X , il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $U \cap V = \emptyset$. L'expression *espace de Hausdorff* est synonyme d'espace topologique séparé.

Définition I.1. Un *groupe abélien localement compact* est un groupe commutatif $(G, +)$ muni d'une topologie telle que

- (1) G est séparé, et tout point de G contient un voisinage compact.
- (2) Les opérations de groupe sont continues, i.e. $x \mapsto -x$ et $(x, y) \mapsto x + y$ sont des applications continues de G (respectivement $G \times G$) dans G .

Exemples I.2. • Tout groupe fini muni de la topologie discrète.

- $(\mathbb{R}^d, +)$ muni de la topologie usuelle.
- $(\mathbb{R}^d / (T\mathbb{Z})^d, +)$ muni de la topologie quotient, où $T > 0$. On prend souvent $T = 2\pi$, ce qui identifie naturellement $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ au cercle unité. Les fonctions sur $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ s'identifient naturellement aux fonctions T -périodiques sur $\mathbb{R}$.
- $(\mathbb{Z}^d, +)$ muni de la topologie discrète.

Dans toute la suite, sauf mention contraire, G est un groupe abélien localement compact.

1.b. Groupe dual.

Définition I.3. Un *caractère* sur G est un homéomorphisme continu de G dans le cercle unité de $\mathbb{C}$, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble des caractères sur G est appelé *groupe dual* de G et noté $\widehat{G}$.

On notera l'image d'un élément x de G par un caractère ξ avec des crochets: $\langle \xi, x \rangle$.

On munit $\widehat{G}$ de l'opération de multiplication ponctuelle, que l'on note additivement:

$$\langle \xi + \eta, x \rangle = \langle \xi, x \rangle \langle \eta, x \rangle, \quad \xi, \eta \in \widehat{G}, \quad x \in G,$$

ce qui en fait un groupe abélien. L'unité de $\widehat{G}$, notée 0, est la fonction constante égale à 1 sur G .

On donne maintenant quelques exemples.

Proposition I.4. • L'ensemble des caractères sur $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble des applications $x \mapsto e^{ix \cdot \xi}$, où $\xi \in \mathbb{R}^d$.
 • L'ensemble des caractères sur $\mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z}^d)$ est l'ensemble des applications $\xi \mapsto e^{ix \cdot \xi}$, où $\xi \in \mathbb{Z}^d$.

On commence par montrer:

Lemme I.5. Soit $G_1, \dots, G_d$ des groupes abéliens localement compacts, et $G = G_1 \times \dots \times G_d$. Alors $\widehat{G}$ s'identifie à $\widehat{G}_1 \times \dots \times \widehat{G}_d$, par le morphisme

$$(\chi_1, \dots, \chi_d) \mapsto \chi_1 \otimes \dots \otimes \chi_d,$$

où

$$(I.1) \quad \chi_1 \otimes \dots \otimes \chi_d : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \langle \chi_1, x_1 \rangle \langle \chi_2, x_2 \rangle \dots \langle \chi_d, x_d \rangle, \quad \chi_j \in \widehat{G}_j$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que (I.1) définit un caractère. Réciproquement, si χ est un caractère sur G , on a

$$\langle \chi, (x_1, \dots, x_d) \rangle = \prod_{j=1}^d \langle \chi_j, x_j \rangle,$$

où $\langle \chi_j, x_j \rangle = \langle \chi, (0, \dots, 0, \underbrace{x_j}_{\substack{\text{j\`eme} \\ \text{coordonnée}}}, 0, \dots, 0) \rangle$, et il est facile de vérifier que χ_j est un caractère sur G_j . $\square$

Preuve de la proposition. D'après le lemme I.5, il suffit de traiter les cas $G = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. On traite seulement le premier cas, le deuxième est laissé en exercice au lecteur.

Soit χ un caractère sur $\mathbb{R}$. On a $\langle \chi, 0 \rangle = 1 \neq 0$. Par continuité de χ , il existe donc T tel que

$$\int_0^T \langle \chi, t \rangle dt = \delta \neq 0.$$

On a

$$\langle \chi, x \rangle \delta = \int_0^T \langle \chi, x \rangle \langle \chi, t \rangle dt = \int_0^T \langle \chi, x + t \rangle dt = \int_x^{x+T} \langle \chi, t \rangle dt.$$

Puisque χ est continue, ceci montre que χ est dérivable et

$$\forall x, \quad \delta \langle \chi', x \rangle = \langle \chi, x + T \rangle - \langle \chi, x \rangle = (\langle \chi, T \rangle - 1) \langle \chi, x \rangle.$$

La résolution de l'équation différentielle (avec la condition initial $\langle \chi, 0 \rangle = 1$) montre que $\langle \chi, x \rangle = e^{i\xi x}$, avec $i\xi = \frac{\langle \chi, T \rangle - 1}{\delta}$. Puisque χ est à valeur dans U , on a $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Proposition I.6. *L'ensemble des caractères sur un groupe abélien fini G est isomorphe à G .*

Démonstration. Soit G un groupe abélien fini. Par le théorème de Kronecker, G est isomorphe à un produit direct de groupes cycliques $\prod_{j=1}^q \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}$, où les d_j sont des entiers ≥ 2 . Par le Lemme I.5, on est ramené au cas $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $d \geq 2$.

Soit χ un caractère sur $\mathbb{Z}/(d\mathbb{Z})$. Soit $e^{i\theta} = \chi(1)$. Pour tout entier n , on a $\chi(n) = \chi(1)^n = e^{in\theta}$. Puisque $\chi(d) = 1$, $\theta = 2\pi k/d$, pour un élément k de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Donc χ est l'application

$$(I.2) \quad e_k : n \mapsto e^{2\pi i n k / d}.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que e_k est bien un caractère sur $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. L'ensemble des caractères sur $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est donc $\{e_k, k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\}$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (compte tenu de la formule $e_k(n)e_j(n) = e_{k+j}(n)$). $\square$

Remarque I.7. La démonstration montre que l'ensemble des caractères sur un groupe abélien $G = \prod_{j=1}^q \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}$ est l'ensemble des applications

$$\xi_k : n \mapsto e^{2i\pi \sum_{j=1}^q k_j n_j / d_j}, \quad k \in G$$

où $k = (k_j)_{1 \leq j \leq q}$, $n = (n_j)_{1 \leq j \leq q}$ sont des éléments de G . L'application $k \mapsto \xi_k$ est un isomorphisme de G dans $\hat{G}$.

On munit $\widehat{G}$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Cette topologie est définie par la base de voisinage

$$\Theta_{\varepsilon, K, \eta} = \left\{ \xi \in \widehat{G} : \forall x \in K, |\langle \xi, x \rangle - \langle \eta, x \rangle| < \varepsilon \right\},$$

où $\eta \in \widehat{G}$, K est un compact de G et $\varepsilon > 0$.

On vérifie facilement que les opérations de groupe sur $\widehat{G}$ sont continues pour cette topologie. Nous verrons plus loin (cf I.17) que $\widehat{G}$ muni de cette topologie est localement compact.

On vérifie que le groupe dual de $\mathbb{R}^d$ s'identifie à $\mathbb{R}^d$ (muni de la topologie usuelle) et que le groupe dual de $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ s'identifie à $\mathbb{Z}^d$ muni de la topologie discrète.

Exercice I.8. Démontrer les assertions faites dans le paragraphe précédent.

Exercice I.9. Soit G un groupe compact.

(1) Soit $\chi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$ montrer

$$\max_{x \in G} |\chi(x) - 1| \geq 1/\sqrt{2}.$$

(2) Montrer que $\widehat{G}$ est discret.

1.c. *Mesure de Haar.* Soit G un groupe abélien localement compact. Il existe une mesure μ non nulle, positive et régulière sur les boréliens de G invariante par translation, c'est à dire telle que $\mu(A+x) = \mu(A)$, pour tout sous-ensemble mesurable A de G et pour tout élément x de G . Une telle mesure est appelée *mesure de Haar* sur G .

Nous omettons la démonstration de l'existence de la mesure de Haar (basée notamment sur le théorème de représentation de Riesz), qui sortirait du cadre de ce cours. Le lecteur intéressé pourra consulter [1], les références données dans les premières pages de [7] ou [5].

La mesure d'un ouvert non vide U par une mesure de Haar est strictement positive. Pour le montrer, on raisonne par l'absurde, en considérant un ouvert U non vide de mesure nulle. Quitte à translater U , on peut supposer que $0 \in U$. Soit K un compact de G . La famille $(U+x)_{x \in K}$ est un recouvrement d'ouverts de K , dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. Par invariance par translation, tous les ouverts $U+x$ sont de mesure nulle. Donc tout compact K est de mesure nulle, contredisant le fait que la mesure μ est régulière et non nulle.

La mesure de Haar est unique à une constante multiplicative près:

Exercice I.10. Soit μ, μ' deux mesures positives et régulières sur les boréliens de G qui sont invariantes par translation. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\mu = \lambda\mu'$. En déduire que pour tout ensemble mesurable A sur E ,

$$\mu(A) = \mu(-A),$$

où $-A = \{-x, x \in A\}$.

La solution de l'exercice (I.10) est donnée dans l'appendice.

Nous parlerons avec un très léger abus de langage de "la" mesure de Haar sur G .

La mesure de Haar est clairement identifiée dans tous les exemples qui seront abordés ici:

Exemple I.11. • La mesure de Haar sur un groupe abélien fini ou plus généralement sur un groupe discret est la mesure discrète.

- La mesure de Haar sur $\mathbb{R}^d$ est la mesure de Lebesgue.
- La mesure de Haar sur $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ est également la projection de la mesure de Lebesgue: si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$, et B son image réciproque dans $\mathbb{R}^d$ par la projection de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$, la mesure de A est simplement la mesure de l'intersection de B avec $[0, 2\pi]^d$.

On notera μ la mesure de Haar sur G , et $\int_G f(x)d\mu(x)$ l'intégrale d'une fonction pour cette mesure.

Exercice I.12. Soit V un ouvert non vide de G . Montrer que $\mu(V) > 0$.

On notera $L^p(G)$ l'espace vectoriel usuel des classes de fonctions mesurables sur G , à valeurs complexes, telles que $\|f\|_p$ est fini, où

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

et

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ M, \mu(\{x \in G, |f(x)| > M\}) > 0 \right\}, \quad p = \infty.$$

On rappelle que l'on identifie ainsi deux fonctions lorsqu'elles sont égales sur un ensemble de mesure nulle, et qu'avec cette identification, l'espace $L^p(G)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.

On peut maintenant définir la transformation de Fourier sur G .

I.2. Transformation de Fourier sur les groupes abéliens localement compacts.

2.a. Définition.

Définition I.13. La transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in L^1(G)$ est la fonction sur $\hat{G}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_G \langle \xi, -x \rangle f(x) d\mu(x).$$

Notons que la définition de la transformée de Fourier dépend du choix de la mesure de Haar. Nous préciserons dans chaque cas la convention faite. La proposition suivante découle immédiatement du théorème de continuité sous le signe somme.

Proposition I.14. Si $f \in L^1(G)$, $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée sur $\hat{G}$. De plus,

$$\sup_{\xi \in \hat{G}} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(G)}.$$

Donnons quelques exemples.

- Soit $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On identifie $\hat{G}$ à G (cf Proposition I.6). Avec cette identification, la transformée de Fourier d'une fonction f sur G est donnée par la fonction

$$\hat{f}(k) = \sum_{n \in G} f(n) e^{-ik \cdot n}, \quad k \in G.$$

Cette transformation est appelée *transformée de Fourier discrète* et apparaît notamment dans le cadre d'application au traitement du signal.

- Soit $G = \mathbb{R}^d$. Le dual de G s'identifie à $\mathbb{R}^d$ (en identifiant $\xi \in \mathbb{R}^d$ avec l'application $x \mapsto e^{ix \cdot \xi}$). Avec cette identification, la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ s'écrit

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

(Il existe d'autres normalisations de la transformation de Fourier).

- Soit $G = \mathbb{T}^d = (\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z})^d$. Dans ce cas, $\hat{G}$ s'identifie à $\mathbb{Z}^d$. La “transformée de Fourier” d'un élément f de $L^1(G)$ est donnée par

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Les $\hat{f}(k)$ sont appelés *coefficients de Fourier de f* .

- Supposons que G est compact. Alors la transformation de Fourier de la fonction constante égale à 1 est donnée par

$$\hat{1}(\xi) = \begin{cases} \mu(G) & \text{si } \xi = 0 \\ 0 & \text{si } \xi \neq 0 \end{cases}.$$

C'est immédiat si $\xi = 0$, puisqu'alors $\langle \xi, x \rangle = 1$ pour tout x de G . Si $\xi \neq 0$, il existe $y \in G$ tel que $\langle \xi, y \rangle \neq 1$. On a alors (en utilisant l'invariance de la mesure de Haar)

$$\hat{1}(\xi) = \int_G \langle \xi, -x \rangle d\mu(x) = \int_G \langle \xi, y - x \rangle d\mu(x) = \langle \xi, y \rangle \int_G \langle \xi, -x \rangle d\mu(x) = \langle \xi, y \rangle \hat{1}(\xi),$$

ce qui montre que $\hat{1}(\xi) = 0$.

Exercice I.15. Calculer la transformation de Fourier de $\bar{f}$, de $x \mapsto f(-x)$ en fonction de celle de f .

La transformée de Fourier admet plusieurs propriétés remarquables dont:

- La transformation du produit de convolution en produit ponctuel.
- La formule d'inversion de Fourier, qui permet de retrouver (sous certaines conditions) une fonction à partir de sa transformation de Fourier.
- La formule de Plancherel qui montre que la transformation de Fourier établit une isométrie entre $L^2(G)$ et $L^2(\hat{G})$.

Nous allons maintenant étudier ces 3 propriétés. La démonstration des deux dernières dans le cadre général des groupes abéliens localement compacts est délicate, et nous nous contenterons de les montrer dans cette section sur les groupes finis. Elles seront plus amplement étudiées dans les cas $G = \mathbb{T}^d$ et $G = \mathbb{R}^d$ dans les deux parties suivantes.

2.b. *Convolution.* La convolution de deux fonctions f, g sur G est définie par

$$(I.3) \quad (f * g)(x) = \int_G f(x - y)g(y) d\mu(y).$$

Théorème I.16. Si $f, g \in L^1(G)$ alors l'intégrale de la formule (I.3) converge presque pour tout x de G . Elle définit un élément $f * g$ de $L^1(G)$ tel que

$$(I.4) \quad \|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

De plus:

$$(I.5) \quad \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}.$$

Démonstration. Le premier point découle du théorème de Fubini et de l'invariance de la mesure de Haar. En effet (toutes les intégrales sont sur G):

$$\begin{aligned} \iint |f(x-y)| |g(y)| d\mu(x) d\mu(y) &= \int |g(y)| \int |f(x-y)| d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int |g(y)| \int |f(x)| d\mu(x) d\mu(y) = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

La formule (I.5) s'obtient par un calcul direct (encore justifié par le théorème de Fubini). Si $\xi \in \widehat{G}$,

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int \langle \xi, -x \rangle \int f(x-y) g(y) d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \iint \langle \xi, y-x \rangle \langle \xi, -y \rangle f(x-y) g(y) d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \int \langle \xi, -z \rangle f(z) d\mu(z) \int \langle \xi, -y \rangle g(y) d\mu(y) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

On démontre facilement l'associativité et la commutativité de la convolution. Il en résulte que $L^1(G)$, muni de sa structure d'espace de Banach et de la convolution, est une algèbre de Banach. Notons que cette algèbre n'est unitaire que dans le cas discret (dans ce cas la fonction caractéristique de $\{0\}$ est un élément non nul de $L^1(G)$ et l'unité pour la convolution).

2.c. Compacité locale du groupe dual.

Proposition I.17. *Le groupe dual $\widehat{G}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, est un groupe abélien localement compact.*

La démonstration repose sur le théorème de Banach-Alaoglu. (cf [3, Chap.3] pour l'énoncé et la preuve de ce résultat d'analyse fonctionnelle). On divise la preuve en deux lemmes.

Nous venons de voir que la convolution confère à l'espace de Banach $L^1(G)$ une structure d'algèbre de Banach. On appelle *caractère* sur $L^1(G)$ un morphisme d'algèbre continu de cette algèbre dans le corps $\mathbb{C}$. On note $X^1(G)$ l'ensemble des caractères non nuls. C'est un sous-ensemble du dual topologique¹ $(L^1(G))'$ de $L^1(G)$. On rappelle que la topologie faible-* sur $(L^1(G))'$ est définie par la notion de convergence suivante:

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \varphi \iff \forall f \in L^1(G), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(f) = \varphi(f).$$

Dans toute la suite, nous utiliserons exclusivement (parfois de manière implicite) cette topologie sur $(L^1(G))'$. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, les sous-ensembles bornés (pour la norme d'opérateur) de $(L^1(G))'$ sont compacts pour la topologie faible-*. Nous allons en déduire:

Lemme I.18. *L'ensemble $X^1(G)$ est localement compact pour la topologie induite par la topologie faible-* sur $(L^1(G))'$.*

¹l'espace de Banach des formes linéaires continues sur $L^1(G)$

Démonstration. Soit $\varphi \in X^1(G)$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe un voisinage compact K de φ dans $(L^1(G))'$. L'ensemble $X^1(G) \cup \{0\}$ est fermé: c'est l'intersection des fermés $\{\psi \in (L^1(G))' \mid \psi(f * g) = \psi(f)\psi(g)\}$, où f et g parcourent $L^1(G)$.²

On fixe $f \in L^1(G)$ tel que $\varphi(f) = 1$, et on pose

$$F = \left\{ \psi \in (L^1(G))' \mid |\varphi(f) - \psi(f)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

C'est un voisinage fermé de φ dans $(L^1(G))'$ qui ne contient pas 0. On en déduit que $F \cap K$ est un voisinage compact de φ dans $(L^1(G))'$ qui ne contient pas 0. Finalement $F \cap K \cap X^1(G) = F \cap K \cap (X^1(G) \cup \{0\})$ est un voisinage compact de φ dans $X^1(G)$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Soit $\xi \in \widehat{G}$. On définit l'application φ_ξ par

$$\varphi_\xi(f) = \hat{f}(-\xi) = \int_G \langle \xi, x \rangle f(x) d\mu(x).$$

On remarque que φ_ξ est un caractère sur $L^1(G)$. Ceci découle des propriétés de la transformation de Fourier que nous avons déjà vues, et notamment de I.5.

Lemme I.19. *L'application $\Phi : \xi \mapsto \varphi_\xi$ est un homéomorphisme³ de $\widehat{G}$ dans $X^1(G)$.*

Rappelons que $\widehat{G}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et $X^1(G)$ de la topologie induite par la topologie faible $*$ sur $(L^1(G))'$

Démonstration. On commence par montrer que pour tout $\xi \in \widehat{G}$, le caractère φ_ξ n'est pas identiquement nul. Pour cela on se donne (en utilisant la continuité de ξ) un voisinage ouvert V de 0 dans G tel que pour tout x de V , $\operatorname{Re} \langle \xi, x \rangle \geq \frac{1}{2}$. Si f est une fonction continue positive sur G , à support dans V et telle que $\int_G f = 1$, on vérifie facilement $\operatorname{Re} f(-\xi) \geq \frac{1}{2}$, et donc $\varphi_\xi(f) \neq 0$.

On montre ensuite que Φ est **continue**. Soit $(\xi_n)_n$ une suite de $\widehat{G}$ qui converge vers $\xi \in \widehat{G}$ uniformément sur tout compact de G . Soit $f \in G$. Soit $\varepsilon > 0$ et g une fonction continue à support compact telle que $\|f - g\|_{L^1(G)} < \varepsilon$. Alors

$$|\varphi_{\xi_n}(f) - \varphi_{\xi_n}(g)| \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, et en remarquant que $\varphi_{\xi_n}(g)$ tend vers $\varphi_\xi(g)$, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{\xi_n}(f) - \varphi_\xi(g)| \leq \varepsilon.$$

En utilisant $|\varphi_\xi(f) - \varphi_\xi(g)| \leq \varepsilon$, on en déduit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{\xi_n}(f) - \varphi_\xi(f)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre bien ($\varepsilon > 0$ étant arbitraire),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n}(f) = \varphi_\xi(f),$$

et donc que φ_{ξ_n} tend vers φ_ξ pour la topologie faible- $*$.

²remarquons que l'ensemble $X^1(G)$ n'est pas toujours fermé. Lorsque $G = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$, 0 est dans l'adhérence de cet ensemble.

³Une fonction continue, bijective, d'inverse continue

Montrons que Φ est **injective**. Soit $\xi \in \widehat{G}$ et $\varphi = \Phi(\xi)$. Comme montré plus haut, φ n'est pas identiquement nul. On peut donc se donner $f \in L^1(G)$ tel que $\varphi(f) \neq 0$. Quitte à renormaliser f , on peut supposer $\varphi(f) = 1$.

Posons $f_y(x) = f(x - y)$. On a

$$\varphi(f_y) = \int_G f(x - y) \langle \xi, x \rangle d\mu(x) = \int_G f(x) \langle \xi, x + y \rangle d\mu(y) = \langle \xi, y \rangle \varphi(f) = \langle \xi, y \rangle.$$

D'où

$$(I.6) \quad \langle \xi, y \rangle = \varphi(f_y).$$

Ceci montre que ξ est uniquement déterminé par φ , i.e. l'injectivité de Φ .

Pour montrer la **surjectivité** de Φ , on fixe $\varphi \in X^1(G)$, et on se donne à nouveau $f \in L^1(G)$ tel que $\varphi(f) = 1$. Pour $y \in G$, on définit $\langle \xi, y \rangle$ par (I.6). Montrons que cela définit un élément ξ de $\widehat{G}$. On a bien $\langle \xi, 0 \rangle = 1$. De plus, en utilisant que φ est un caractère sur $L^1(G)$, on a, pour tout $y \in G$

$$\varphi((f * f)_y) = \varphi(f * (f_y)) = \varphi(f)\varphi(f_y) = \langle \xi, y \rangle.$$

Donc si $(y, z) \in G^2$,

$$\langle \xi, y + z \rangle = \varphi((f * f)_{y+z}) = \varphi(f_y * f_z) = \varphi(f_y)\varphi(f_z) = \langle \xi, y \rangle \langle \xi, z \rangle.$$

En utilisant que $\|f_y - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$ (cette propriété se vérifie aisément quand f est continue à support compact, le cas général s'en déduit par densité), on voit que ξ est continu, ce qui montre que ξ est bien un élément de $\widehat{G}$. Posons $\psi = \Phi(\xi)$ et montrons que $\psi = \varphi$. Par définition de Φ et ξ , pour tout g de $L^1(G)$, on a

$$\begin{aligned} \psi(g) &= \int \langle \xi, y \rangle g(y) d\mu(y) = \int \varphi(f_y) g(y) d\mu(y) \\ &= \int \varphi(g(y) f_y) d\mu(y) = \varphi(g * f) = \varphi(g). \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a utilisé

$$(I.7) \quad \forall f, g \in L^1(G), \forall \varphi \in L^1(G)', \quad \int \varphi(g(y) f_y) d\mu(y) = \varphi(g * f).$$

Montrons que cette égalité est vraie. Lorsque G est σ -compact, on sait que le dual de $L^1(G)$ s'identifie à $L^\infty(G)$, et donc que la forme linéaire φ sur G est automatiquement de la forme $\varphi(f) = \int_G a(x) f(x) dx$ pour un $a \in L^\infty$. L'égalité (I.7) découle alors immédiatement du théorème de Fubini. Dans le cas général, le même raisonnement donne la formule (I.7) lorsque f et g sont à support compact: $f * g$ est alors à support dans le compact $K = \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$, et la restriction de la forme linéaire φ à $L^1(K)$ s'identifie à un élément de $L^\infty(K)$. On obtient ensuite la formule (I.7) pour tout f, g dans $L^1(G)$ par densité.

Il reste à montrer que la réciproque de Φ est continue, ce qui est laissé au lecteur. $\square$

2.d. *Formule d'inversion de Fourier.* Comme on vient de le démontrer, le dual $\widehat{G}$ de G est un groupe abélien localement compact. On peut donc définir une transformation de Fourier sur $\widehat{G}$, qui transforme une fonction définie sur $\widehat{G}$ en fonction définie sur $\widehat{G}$.

Si $x \in G$, x définit un caractère α_x sur $\widehat{G}$:

$$\alpha_x(\xi) = \langle \xi, x \rangle, \quad \xi \in \widehat{G}.$$

L'ensemble $\alpha(G) = \{\alpha_x, x \in G\}$ est un sous groupe de $\widehat{G}$.

Théorème I.20 (Théorème de dualité de Pontriaguine). *Le dual de $\widehat{G}$ est exactement $\alpha(G)$.*

Exercice I.21. Vérifier le théorème I.20 dans les exemples I.2.

On omet la démonstration du théorème I.20 dans le cas général.

On rappelle que l'on emploie la notation additive sur le groupe $\widehat{G}$: $\xi + \eta$ est donc l'homéomorphisme de G dans U : $x \mapsto \langle \xi, x \rangle \langle \eta, x \rangle$. On a aussi:

$$\langle -\xi, x \rangle = \langle \xi, x \rangle^{-1} = \overline{\langle \xi, x \rangle} = \langle \xi, -x \rangle.$$

D'après le théorème I.20, la transformée de Fourier sur $\widehat{G}$ associe à une fonction $\varphi \in L^1(\widehat{G})$ une fonction $\hat{\varphi} \in C^0(G)$, définie par

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{\widehat{G}} \langle -\xi, x \rangle \varphi(\xi) d\hat{\mu}(\xi), \quad x \in G,$$

où on note $\hat{\mu}$ la mesure de Haar sur $\widehat{G}$.

Proposition I.22 (Formule de dualité). *Soit $f \in L^1(G)$, $\varphi \in L^1(\widehat{G})$. Alors*

$$(I.8) \quad \int \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int f(x) \hat{\varphi}(x) dx.$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini:

$$\int_{\widehat{G}} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} \int_G f(x) \langle \xi, -x \rangle dx \varphi(\xi) d\xi = \int_G f(x) \int_{\widehat{G}} \langle -\xi, x \rangle \varphi(\xi) d\xi dx.$$

□

Le théorème d'inversion de Fourier affirme que l'application successive de la transformée de Fourier (au sens de G) et de la transformée de Fourier (au sens de $\widehat{G}$) permet de retrouver, à un changement de signe sur la variable et une constante multiplicative près, de la fonction de départ.

$$(I.9) \quad \hat{\hat{f}}(-x) = cf(x)$$

où f est un élément de $L^1(G)$ vérifiant certaines conditions, $c > 0$ ne dépend que du choix de la mesure de Haar.

Théorème I.23. *La formule (I.9) est vraie:*

- (1) *Lorsque G est fini et f est une fonction sur G .*
- (2) *Plus généralement, lorsque G est discret et $f \in L^1(G)$.*
- (3) *Lorsque $G = \mathbb{R}^d / (T\mathbb{Z})^d$ ou $G = \mathbb{R}^d$, $f \in L^1(G)$ et $\hat{f} \in L^1(\widehat{G})$.*

La preuve du point (2) est laissé en exercice (cf Exercice I.24 plus loin). Nous verrons le point (3) dans les deux cours suivants.

Preuve de (1). Par le théorème de Kronecker, on peut supposer $G = \prod_{j=1}^q \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}$, où les d_j sont des entiers ≥ 2 . On rappelle que $\widehat{G}$ s'identifie à G par l'isomorphisme de groupe $k \mapsto \xi_k$,

$$\langle \xi_k, n \rangle = e^{2i\pi \sum_{j=1}^q n_j k_j / d_j}$$

(cf remarque I.7). On utilise comme mesure de Haar sur G et sur $\widehat{G}$ la mesure de comptage. Si $f \in \mathbb{C}^G$, sa transformation de Fourier est définie par

$$\hat{f}(k) = \sum_{n \in G} f(n) \langle \xi_k, -n \rangle = \sum_{n \in G} f(n) e^{-2i\pi \sum_{j=1}^q n_j k_j / d_j}.$$

On note $\ell^2(G)$ l'espace de Hilbert formé de $\mathbb{C}^G$ muni du produit scalaire hermitien

$$(f|g)_{\ell^2} = \sum_{n \in G} f(n) \overline{g(n)}.$$

On remarque

$$(I.10) \quad \hat{f}(k) = (f|\xi_k)_{\ell^2}.$$

de plus $(\frac{1}{\sqrt{|G|}} \xi_k)_{k \in G}$ est une base orthonormale de $\ell^2(G)$, comme le montre un calcul direct:

$$\begin{aligned} (\xi_k|\xi_{k'})_{\ell^2} &= \sum_{n \in G} e^{2i\pi \sum_{j=1}^q (k_j - k'_j) n_j / d_j} = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}} \dots \sum_{n_q \in \mathbb{Z}/d_q\mathbb{Z}} \prod_{j=1}^q e^{2i\pi (k_j - k'_j) n_j / d_j} \\ &= \prod_{j=1}^q \sum_{n_j \in \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}} e^{2i\pi (k_j - k'_j) n_j / d_j}. \end{aligned}$$

Par la formule de somme d'une série géométrique

$$\sum_{n_j \in \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}} e^{2i\pi (k_j - k'_j) n_j / d_j} = \begin{cases} d_j & \text{si } k_j \equiv k'_j \pmod{d_j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où

$$(\xi_k|\xi_{k'})_{\ell^2} = \delta_{k,k'} |G|,$$

ce qui montre que $(\frac{1}{\sqrt{|G|}} \xi_k)_{k \in G}$ est une famille orthonormale de $\ell^2(G)$. On a donc

$$(I.11) \quad f = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} (f|\xi_k)_{\ell^2} \xi_k = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \hat{f}(k) \xi_k,$$

où on a utilisé la formule (I.10).

Par ailleurs, la définition de la transformation de Fourier sur $\widehat{G}$ et l'identification de G à $\widehat{G}$ donnent

$$\hat{\hat{f}}(n) = \sum_{k \in G} \hat{f}(k) \langle \xi_n, -k \rangle = \sum_{k \in G} \hat{f}(k) \langle \xi_k, -n \rangle,$$

ce qui donne avec (I.11):

$$f(n) = \frac{1}{|G|} \hat{\hat{f}}(-n), \quad n \in G,$$

soit la formule d'inversion de Fourier avec $c = 1/|G|$. □

Exercice I.24. Montrer le point 2 du théorème I.23. Plus précisément, montrer

$$\mu(\widehat{G})\mu(\{0_G\})f(x) = \widehat{f}(-x),$$

où $\mu(\{0_G\})$ est la mesure de n'importe quel singleton sur G .

Remarque I.25. Dans le cas $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, la mesure de Haar est généralement renormalisée pour que la mesure totale de G soit 1. La transformée de Fourier de $f \in \mathbb{C}^G$ (appelée *transformée de Fourier discrète*) est alors:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{d} \sum_{n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi kn/d}.$$

La formule d'inversion de Fourier s'écrit:

$$f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2i\pi kn/d}.$$

La transformation de Fourier discrète est notamment utilisée en traitement du signal cf le livre de Gasquet et Witomski [4].

2.e. *Théorème de Plancherel.* Il s'agit du résultat suivant:

Théorème I.26. Soit $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$ et

$$(I.12) \quad \int_G |f(x)|^2 dx = c \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Éléments de preuve. Preuve lorsque G est fini. On reprend les notations de la démonstration du théorème I.23. Le théorème de Pythagore dans la base orthonormale $(\xi_k)_{k \in G}$ de $\ell^2(G)$ donne:

$$\|f\|_{\ell^2(G)}^2 = \sum_{k \in G} \frac{1}{|G|} |(f|\xi_k)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{|G|} \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\widehat{G})}^2,$$

ce qui est exactement la formule (I.12).

Un cas particulier lorsque G est quelconque. On montre la formule (I.12) dans le cas où $f \in L^1(G)$, $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ et f vérifie la formule d'inversion de Fourier (I.9). On renvoie à [7] pour le cas général.

Remarquons nos hypothèses impliquent que f est bornée (en tant que transformation de Fourier de la fonction $L^1 \xi \mapsto c\widehat{f}(-\xi)$) et donc que $f \in L^2$ (car $|f|^2 = f\overline{f}$ est le produit d'une fonction bornée et d'une fonction L^1).

Avec ces hypothèses, la formule de Plancherel découle directement de la formule d'inversion de Fourier I.9 et de la formule de dualité I.8. En effet, en utilisant successivement ces deux formules,

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^2 dx &= c \int \widehat{f}(-x) \overline{f}(x) dx = c \int \widehat{f}(-\xi) \widehat{\overline{f}}(\xi) d\xi = \\ &= c \int \widehat{f}(-\xi) \overline{\widehat{f}(-\xi)} d\xi = c \int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

On a également utilisé que la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est la fonction $\xi \mapsto \widehat{f}(-\xi)$ et que celle de la fonction $x \mapsto \overline{f}(x)$ est $\xi \mapsto \overline{\widehat{f}(-\xi)}$, ce que le lecteur vérifiera facilement. $\square$

II. SÉRIES DE FOURIER

II.1. **Généralités.** On s'intéresse dans cette partie II au cas du tore

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z})^d.$$

Une fonction f sur $\mathbb{T}^d$ s'identifie à une fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}^d$, c'est à dire telle que

$$f(x + 2\pi k) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

On fera cette identification de manière implicite dans tout ce cours.

On normalisera la mesure de Haar de telle manière que la mesure de $\mathbb{T}^d$ soit égale à 1. Par souci de clarté, on utilisera toujours la notation dx pour la mesure de Lebesgue. L'intégrale d'une fonction f 2π -périodique sur $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Haar sera donc:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} f(x) dx$$

Le choix de la période 2π est arbitraire et peut être remplacée par une période $T > 0$ quelconque en rééchelonnant les fonctions.

On rappelle que les caractères sur $\mathbb{T}^d$ sont les fonctions e_k de la forme $x \mapsto e^{ik \cdot x}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, où $k \cdot x = \sum_{j=1}^d k_j x_j$ (cf Proposition I.4). Ceci permet de d'identifier le groupe dual de $\mathbb{T}^d$ à $\mathbb{Z}^d$. Avec cette identification et notre choix de la mesure de Haar, la "transformée de Fourier" d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ est la suite $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^d}$, définie par

$$(II.1) \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} e^{-ik \cdot x} f(x) dx.$$

Par une vérification directe (ou le théorème de dualité de Pontriaguine), le groupe dual de $\mathbb{Z}^d$ s'identifie à $\mathbb{T}^d$. Les caractères sur $\mathbb{Z}^d$ sont en effet les applications $\chi_x : k \mapsto e^{ik \cdot x}$, $x \in \mathbb{T}^d$ en identifiant χ_x et x , la transformée de Fourier (au sens du chapitre I) d'un élément $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ de $\mathbb{Z}^d$ est par définition la fonction

$$x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{-ik \cdot x}.$$

Le théorème d'inversion de Fourier, lorsqu'il est vérifié, affirme donc qu'une fonction $f \in L^1(G)$ est égal à la série

$$(II.2) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}.$$

La série (II.2) est appelée *série de Fourier de f* . La convergence de cette série (par exemple au sens de la convergence simple), et l'égalité de sa somme avec f n'est pas vraie pour des $f \in L^1$ généraux. L'étude de cette convergence constitue un des problèmes classiques de l'analyse harmonique. Nous allons d'abord considérer une convergence plus faible dans le cas $d = 1$.

Ce chapitre sur les séries de Fourier est en partie basé sur le livre [6]. Une autre référence intéressante et facile d'accès sur les série de Fourier (et l'analyse de Fourier en général) est [9].

II.2. Convergence en moyenne. On suppose $d = 1$. On notera $\mathbb{T} = \mathbb{T}^1$ pour simplifier. Par définition, l'étude de la convergence de la série de Fourier (II.2) est l'étude de la convergence des sommes partielles $S_n(f)$ définies par

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{+n} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

On peut considérer cette convergence dans les espaces usuels associés à la transformation de Fourier $L^1(\mathbb{T})$ et $L^2(\mathbb{T})$, mais aussi pour d'autres topologies (convergence ponctuelle, convergence uniforme).

On traite d'abord un problème plus simple, l'étude de la convergence *en moyenne* (ou au sens de Cesàro) des $S_n(f)$. Cette partie suit essentiellement [6, I.2].

On considère donc la suite des moyennes $(\sigma_N(f))_{N \geq 0}$ définie par

$$(II.3) \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f).$$

2.a. *Noyaux de Dirichlet et de Fejér.* On a

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)} f(y) dy = D_n * f(x),$$

où

$$(II.4) \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx}$$

est appelé *noyau de Dirichlet*. On en déduit

$$\sigma_N(f)(x) = (F_N * f)(x),$$

où

$$(II.5) \quad F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x)$$

est appelé *noyau de Fejér*.

Ces deux noyaux se calculent facilement.

Proposition II.1.

$$(II.6) \quad D_n(x) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(II.7) \quad F_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Ces égalités se démontrent par un calcul direct, en utilisant la formule de somme d'une formule trigonométrique. Les détails sont laissés à la lectrice.

2.b. *Convergence en norme.* Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on note $f_\tau(t) = f(t - \tau)$. On dit qu'un sous-espace de Banach B de $L^1(\mathbb{T})$ est *invariant par translation* lorsque

$$f \in B \text{ et } \tau \in \mathbb{R} \implies f_\tau \in B \text{ et } \|f_\tau\|_B = \|f\|_B.$$

Un *espace de Banach homogène* sur $\mathbb{T}$ est un espace de Banach $B \subset L^1(\mathbb{T})$, invariant par translation et tel que

$$(II.8) \quad \forall f \in B, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \|f_\tau - f\|_B = 0.$$

Des exemples d'espace de Banach homogènes sont

- $C^0(\mathbb{T})$ muni de la norme uniforme.
- $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.

La propriété d'invariance par translation est évidente dans les 2 cas. Le fait que

$$(II.9) \quad \forall f \in C^0(\mathbb{T}), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \|f - f_\tau\|_{L^\infty} = 0$$

découle de la continuité uniforme de f qui est automatique puisque $\mathbb{T}$ est compact. La propriété

$$\forall p \in [1, \infty), \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \|f - f_\tau\|_{L^p} = 0,$$

se déduit de (II.9) et de la densité des fonctions continues dans $L^p(\mathbb{T})$. On commence par énoncer un lemme technique qui montre essentiellement que les espaces de Banach homogènes sont stables par convolution:

Lemme II.2. *Soit B un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$, $f \in B$, et φ une fonction continue, 2π -périodique. On note*

$$F(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)\varphi(y)dy.$$

Alors

$$(II.10) \quad F \in B, \quad \|F\|_B \leq \|f\|_B \int_0^{2\pi} |\varphi(y)|dy$$

$$(II.11) \quad \left\| F - f \int \varphi(y)dy \right\|_B \leq \int_0^{2\pi} \|f - f_y\|_B \varphi(y)dy.$$

Remarquons que la propriété (II.8) implique que l'application $y \mapsto \|f - f_y\|_B$ est continue. L'intégrale du terme de droite de l'inégalité (II.11) est donc bien définie.

Les propriétés (II.10) et (II.11) sont standard lorsque $B = C^0(\mathbb{T})$ et $B = L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. On en donne une démonstration générale dans l'appendice. Remarquons que le Lemme II.2 découle immédiatement de la théorie de l'intégrale de Bochner (intégrale à valeurs dans des Banach). La démonstration donnée en appendice est indépendante de cette théorie.

Nous allons montrer le résultat suivant:

Théorème II.3 (Théorème de Fejér). *Soit $B \subset L^1(\mathbb{T})$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ et $f \in B$. Alors*

$$(II.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_B = 0,$$

où $\sigma_n(f)$ est défini par (II.3).

Avant de démontrer ce théorème, on en donne deux conséquences importantes. La première est un résultat d'unicité sur les séries de Fourier:

Théorème II.4 (Unicité). *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\hat{f}(k) = 0$ pour tout k de $\mathbb{Z}$. Alors $f = 0$ presque partout.*

Démonstration. Puisque $\hat{f}(k) = 0$ pour tout k , les $\sigma_n(f)$ sont tous nuls. On déduit du théorème que $\|f\|_{L^1} = 0$ ce qui est exactement la conclusion recherchée. $\square$

On rappelle qu'un polynôme trigonométrique est une fonction P sur $\mathbb{T}$ qui s'écrit

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{+N} a_n e^{inx},$$

pour un certain entier $N \geq 0$ et des coefficients a_n

Corollaire II.5. *Soit B un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Les polynômes trigonométriques sont denses dans B .*

Démonstration. Ceci découle immédiatement du théorème II.3 et du fait que les $\sigma_n(f)$ sont des polynômes trigonométriques. Dans le cas $B = L^2(\mathbb{T})$, on peut aussi déduire ce résultat du théorème d'unicité II.4, qui montre que l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par les polygones trigonométriques est réduit à $\{0\}$. $\square$

Le Corollaire II.5 implique en particulier le *théorème de Weierstrass trigonométrique*: les polynômes trigonométriques sont denses dans $C^0(\mathbb{T})$. Nous en verrons également une conséquence importante avec $B = L^2(\mathbb{T})$.

Nous allons montrer un résultat un petit peu plus général que le théorème II.3. Le noyau de Fejér a les propriétés remarquable suivantes:

Proposition II.6.

$$(II.13) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) dt = 1$$

$$(II.14) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} F_n(t) dt < \infty$$

$$(II.15) \quad \forall \delta \in]0, \pi[, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} |F_n(t)| dt = 0.$$

Démonstration. Par la définition du noyau de Dirichlet (II.4), on a (en utilisant que $\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 2\pi \delta_{0,k}$),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1$$

On déduit (II.13) de cette égalité et de la définition (II.5) du noyau de Fejér.

L'estimation (II.14) découle de (II.13) et du fait que F_n est positif.

Enfin, on remarque que $\min_{\delta < x < 2\pi-\delta} \sin(x/2) = \sin \delta/2 > 0$, et donc

$$(II.16) \quad \sup_{\delta < x < 2\pi-\delta} |F_n(x)| \leq \frac{1}{(N+1) \sin^2(\delta/2)},$$

ce qui montre (II.15). $\square$

Définition II.7. Une suite de fonctions continues $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{T}^1$ qui vérifie les trois conditions (II.13), (II.14) et (II.15) est appelée suite d'approximation de l'identité.

Le théorème II.3 découlera immédiatement du résultat suivant:

Théorème II.8. Soit $(k_n)_n$ une suite d'approximation de l'identité sur $\mathbb{T}$ et B un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Soit $f \in B$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k_n * f - f\|_B = 0.$$

Démonstration. En utilisant que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(y) dy = 1$, on écrit

$$(k_n * f - f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (k_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy.$$

Donc, en utilisant la propriété (II.11),

$$\|k_n * f - f\|_B \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n(y)| \|f_y - f\|_B dy.$$

On a

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(y)| \|f_y - f\|_B dy \leq 2\|f\|_B \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(y)| dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car k_n vérifie la propriété (II.15).

Donc pour tout $\delta > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|k_n * f - f\|_B \leq C \sup_{|y| \leq \delta} \|f_y - f\|_B,$$

où

$$C = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |k_n(y)| dy,$$

qui est fini car k_n vérifie la propriété (II.14). On en déduit la convergence recherchée, puisque

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|f_y - f\|_B = 0.$$

□

Nous reviendrons au problème de la convergence des séries de Fourier sur $\mathbb{T}^1$ plus loin. Nous allons maintenant montrer les théorèmes d'inversion de Fourier et de Plancherel dans le cas $G = \mathbb{T}^d$.

II.3. Convergence normale. On se place ici en dimension quelconque $d \geq 1$. Nous allons montrer:

Théorème II.9 (Convergence normale). Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ tel que $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^d} \in L^1(\mathbb{Z}^d)$. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .

Le théorème II.9 est exactement la formule d'inversion de Fourier (Théorème I.23 du chapitre I) dans le cas $G = \mathbb{T}^d$.

Pour démontrer ce résultat, il est nécessaire de généraliser le théorème d'unicité II.4 à la dimension supérieure:

Théorème II.10. Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ tel que $\hat{f}(k) = 0$ pour tout k de $\mathbb{Z}^d$. Alors $f = 0$ presque partout.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $d \geq 1$. Le théorème II.4 donne le cas $d = 1$.

On fixe $d \geq 1$, et on suppose le théorème vrai sur $\mathbb{T}^{d-1}$. On note un élément de $\mathbb{T}^d$, $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^{d-1}$, et de la même manière un élément

de $\mathbb{Z}^d$, $k = (k_1, k')$. Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ dont tous les coefficients de Fourier sont nuls. Soit $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $k' \in \mathbb{R}^{d-1}$. On considère

$$f_{k'}(x_1) = \int_{\mathbb{T}^{d-1}} f(x_1, x') e^{-ik' \cdot x'} dx'.$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli, la formule précédente définit un élément $f_{k'}$ de $L^1(\mathbb{T}^1)$. L'hypothèse que les coefficients de Fourier de f sont nuls implique que ceux de $f_{k'}$ sont nuls. Par le théorème d'unicité en dimension 1, $f_{k'}(x_1) = 0$ presque pour tout x_1 . Par dénombrabilité de $\mathbb{Z}^d$, on en déduit que presque pour tout x_1 ,

$$\forall k' \in \mathbb{Z}^{d-1}, \quad \int_{\mathbb{T}^{d-1}} f(x_1, x') e^{-ik' \cdot x'} dx' = 0.$$

Donc presque pour tout x_1 , la fonction

$$x' \mapsto f(x_1, x')$$

est un élément de $L^1(\mathbb{T}^{d-1})$ dont les coefficients de Fourier sont nuls. Par hypothèse de récurrence, $f = 0$ presque partout ce qui conclut la preuve. $\square$

Preuve du théorème II.9. On considère la somme de la série trigonométrique de f :

$$S_f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}.$$

Par hypothèse, la série converge normalement sur $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une fonction continue S_f sur $\mathbb{T}^d$. En utilisant

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ik \cdot x} e^{-ik' \cdot x} = \delta_{k, k'}$$

et la convergence normale de la série, on obtient $\widehat{S_f} = \hat{f}$. Le théorème II.10 permet de conclure que $f = S_f$. $\square$

II.4. Théorème de Parseval. On montre ici le théorème de Plancherel, qui dans le contexte des séries de Fourier s'appelle théorème de Parseval:

Théorème II.11. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Alors $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ et*

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)|^2.$$

Démonstration. On rappelle que e_k désigne l'application $x \mapsto e^{ik \cdot x}$. On observe que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T}^d)$, muni du produit scalaire hermitien

$$(f|g) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On montre que cette famille est en fait une base hilbertienne (i.e. que l'espace vectoriel V engendré par les e_k est dense dans $L^2(\mathbb{T}^d)$). Il suffit de montrer que l'orthogonal de cet espace vectoriel est réduit à $\{0\}$. Soit $f \in V^\perp$. Alors tous ses coefficients de Fourier sont nuls. Par le théorème d'unicité II.10, $f = 0$ dans L^2 , ce qui conclut la preuve que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est une base de Hilbert.

Remarquons que $\hat{f}(k) = (f|e_k)$. On déduit donc de ce qui précède que

$$f \mapsto \left(\hat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}^d}$$

est une isométrie (bijective) de $L^2(\mathbb{T}^d)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. $\square$

Exercice II.12. Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = 1$ pour $x \in [0, \pi]$, et 0 pour $x \in]-\pi, 0[$.

- (1) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- (2) En déduire $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$, puis $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.

II.5. Dérivation et séries de Fourier. La dérivation d'une fonction se traduit par une multiplication de sa série de Fourier par une puissance de k . On commence par introduire une notation. Un multi-indice α est un élément de $\mathbb{N}^d$. Pour un tel multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, on note

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \quad \partial_x^\alpha = \prod_{j=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j}, \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j} \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Théorème II.13. Soit $f \in C^q(\mathbb{T}^d)$, $q \geq 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq q$. Alors

$$(II.17) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \widehat{\partial_x^\alpha f}(k) = (ik)^\alpha \hat{f}(k).$$

Démonstration. En raisonnant par récurrence, on voit qu'il suffit de traiter le cas où $|\alpha| = 1$, par exemple $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$. Soit donc f de classe C^1

$$\widehat{\partial_{x_1} f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \partial_{x_1} f(x) e^{-ix \cdot k} dx.$$

Par intégrations par parties et en utilisant la périodicité de f ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix_1 k_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x') dx_1 = ik_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix_1 k_1} f(x_1, x') dx_1,$$

ce qui donne bien, après intégration en $x' = (x_2, \dots, x_d)$,

$$\widehat{\partial_{x_1} f}(k) = ik_1 \hat{f}(k).$$

□

Le corollaire suivant montre que la régularité d'une fonction sur $\mathbb{T}^d$ se traduit par des propriétés de décroissance à l'infini de ses coefficients de Fourier

Corollaire II.14. Soit $f \in C^q(\mathbb{T}^d)$, $q \geq 1$. Alors (pour une constante C ne dépendant que de d et q).

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad |\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{(1 + |k|)^q} \left(\|f\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} + \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j}^q f\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \right).$$

En particulier, si $q \geq 2$, $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{T}^d)$ et donc f vérifie les hypothèses du théorème de convergence normale.

(Dans cet énoncé comme dans la suite, $|\cdot|$ désigne n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^d$, par exemple la norme euclidienne).

Le corollaire découle immédiatement du théorème II.13. En effet, si $f \in C^q(\mathbb{T}^d)$, et $k \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$(|k| + 1)^q |\hat{f}(k)| \lesssim (|k_1|^q + \dots + |k_d|^q + 1) |\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k)| + \sum_{j=1}^d \left| \widehat{\partial_{x_j}^q f}(k) \right|.$$

Une réciproque partielle du Corollaire II.14 est donnée par:

Lemme II.15. Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ tel que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^q |\hat{f}(k)| < \infty.$$

Alors f est de classe C^q sur $\mathbb{T}^d$.

Le lemme se démontre facilement en utilisant le théorème de convergence normale, et le théorème de dérivation sous le signe $\sum$.

On déduit de ce qui précède la convergence vers 0 des coefficients de Fourier d'une fonction L^1 :

Lemme II.16 (Riemann-Lebesgue). Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Alors

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\hat{f}(k)| = 0.$$

Démonstration. Par le corollaire II.14, la propriété demandée est vraie lorsque f est de classe C^1 . Le cas général s'en déduit par densité de $C^1(\mathbb{T}^d)$ dans $L^1(\mathbb{T}^d)$ et l'inégalité

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}.$$

□

II.6. Application à l'équation de la chaleur. L'équation de la chaleur sur le tore $\mathbb{T}^d$ s'écrit

$$(II.18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad t > 0, x \in \mathbb{T}^d,$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. avec une condition initiale

$$(II.19) \quad u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{T}^d$$

La théorie des séries de Fourier permet de résoudre cette équation élégamment:

Théorème II.17. On suppose $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)| < \infty$. Alors il existe une unique fonction $u \in C^0([0, \infty[\times \mathbb{T}^d) \cap C^2([0, \infty[\times \mathbb{T}^d)$ qui vérifie l'équation (II.18) et la condition initiale (II.19). De plus, $u \in C^\infty([0, \infty[\times \mathbb{T}^d)$ et u converge exponentiellement vers sa moyenne quand $t \rightarrow \infty$:

$$(II.20) \quad \|u(t) - \hat{f}(0)\|_{L^\infty} \leq C(f)e^{-t},$$

où $C(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{f}(k)|$.

Démonstration. On commence par montrer l'unicité en trouvant une formule explicite pour u . Soit $u \in C^0([0, \infty[\times \mathbb{T}^d) \cap C^2([0, \infty[\times \mathbb{T}^d)$ qui vérifie (II.18) et (II.19). Soit

$$u_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} u(t, x) e^{ik \cdot x} dx$$

le coefficient de Fourier de $u(t)$ d'ordre k . Par le théorème de dérivation sous le signe intégral on a, dès que $t > 0$,

$$u'_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{ik \cdot x} dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \Delta u(t, x) e^{ik \cdot x} dx.$$

On intègre par parties (ou on utilise le théorème II.13), en utilisant que u est C^2 pour $t > 0$. Puisque $\Delta(e^{ik \cdot x}) = -|k|^2 e^{ik \cdot x}$, où $|k|^2 = \sum_{j=1}^d k_j^2$, on obtient

$$u'_k(t) = -|k|^2 u_k(t), \quad t > 0.$$

De plus, par le théorème de continuité sous le signe intégral, u_k est continue en 0 et $u_k(0) = \hat{f}(k)$. On obtient donc

$$u_k(t) = \hat{f}(k)e^{-|k|^2 t}.$$

On voit que pour tout t , $u(t)$ vérifie les hypothèses du théorème de convergence normale. On a donc, par ce théorème

$$(II.21) \quad u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-|k|^2 t} e^{ik \cdot x} \hat{f}(k).$$

Ceci montre l'unicité de u .

Réciproquement, on définit u par la formule II.21. Il est facile de vérifier, en utilisant l'hypothèse sur f , que u vérifie (II.18) et (II.19), et que c'est une fonction continue sur $[0, \infty[\times \mathbb{T}^d$ et C^∞ sur $]0, \infty[\times \mathbb{T}^d$. La convergence exponentielle de u vers sa moyenne se démontre également aisément avec cette formule. $\square$

II.7. Deux résultats classiques de convergence ponctuelle. Pour conclure cette partie sur les séries de Fourier, on donne deux résultats de convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction en dimension 1.

7.a. Convergence ponctuelle en moyenne. On commence par montrer la convergence ponctuelle au sens de Cesàro près d'un point où la fonction admet des limites à gauche et à droite:

Théorème II.18. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, et $x \in \mathbb{T}$ tel que f admette une limite à gauche $f(x^-)$ et une limite à droite $f(x^+)$ en x . Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Démonstration. La preuve utilise des propriétés plus fortes du noyau de Fejér que (II.13), (II.14) et (II.15), à savoir la positivité de ce noyau et la borne uniforme (II.16).

On peut supposer sans perte de généralité que $x = 0$. On remarque par parité de F_n que

$$\int_{-\pi}^0 F_n(y) dy = \int_0^\pi F_n(y) dy = \pi.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(0) &= \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi F_n(y) f(-y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 F_n(y) f(0^+) dy - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F_n(y) f(0^-) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 F_n(y) (f(-y) - f(0^+)) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F_n(y) (f(-y) - f(0^-)) dy = A_n^+ + A_n^-. \end{aligned}$$

On montre que A_n^+ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. La preuve que A_n^- tend vers 0 est quasiment identique. On a (en utilisant que $F_n(y) = F_n(-y)$):

$$(II.22) \quad 2\pi A_n^+ = \int_0^\delta F_n(y) (f(y) - f(0^+)) dy + \int_\delta^\pi F_n(y) (f(y) - f(0^+)) dy.$$

On fixe $\varepsilon > 0$, et on choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $|f(y) - f(0^+)| < \varepsilon$ pour $0 < y < \delta$. On a alors grâce à la positivité de F_n ,

$$\left| \int_0^\delta F_n(y)(f(y) - f(0^+))dy \right| \leq \varepsilon \int_0^\pi F_n(y)dy \leq \pi\varepsilon.$$

Par ailleurs, en utilisant (II.16) et le fait que f soit dans L^1 , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi F_n(y)(f(y) - f(0^+))dy = 0.$$

On a donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n^+| \leq \pi\varepsilon,$$

ce qui montre, ε étant arbitrairement petit, que A_n^+ tend vers 0. $\square$

7.b. *Théorème de Jordan-Dirichlet.* On démontre maintenant un résultat de convergence ponctuelle des sommes partielles $S_n(f)$. On commence par montrer un théorème taubérien, selon lequel la convergence de $S_n(f)$ est équivalente à sa convergence au sens de Cesàro dès que la condition $|\hat{f}(k)| \lesssim 1/|k|$ est vérifiée.

Théorème II.19. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que*

$$(II.23) \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} |k| |\hat{f}(k)| < \infty.$$

Alors $S_n(f)(x)$ et $\sigma_n(f)(x)$ convergent pour les mêmes valeurs de x , et vers la même limite. Si la convergence de $\sigma_n(f)$ est uniforme sur un certain ensemble, c'est également le cas pour $S_n(f)$.

Démonstration. On se donne $\varepsilon > 0$, et $\lambda > 1$ proche de 1, tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{n < |k| \leq \lambda n} |\hat{f}(k)| < \varepsilon.$$

(Ceci est possible car l'hypothèse sur les $\hat{f}(k)$ implique que $\sum_{n < k \leq \lambda n} \lesssim \log(\lambda)$ pour n grand.) En notant $[x]$ la partie entière d'un nombre réel x , on a, pour n grand,

$$\begin{aligned} ([n\lambda] + 1) \sigma_{[n\lambda]} - (n + 1) \sigma_n(f) &= \sum_{j=0}^{[n\lambda]} S_j(f) - \sum_{j=0}^n S_j(f) \\ &= \sum_{j=n+1}^{[n\lambda]} \sum_{k=-j}^j \hat{f}(k) e^{ikx} = ([n\lambda] - n) \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} \\ &\quad + \sum_{n+1 \leq |k| \leq [n\lambda]} ([n\lambda] + 1 - k) \hat{f}(k) e^{ikx}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$(II.24) \quad \left| S_n(f) - \frac{[n\lambda] + 1}{[n\lambda] - n} \sigma_{[n\lambda]}(f) + \frac{n + 1}{[n\lambda] - n} \sigma_n(f) \right| \leq \sum_{n+1 \leq |k| \leq [n\lambda]} |\hat{f}(k)| < \varepsilon$$

pour n grand, et ce uniformément en x . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x) = \sigma,$$

on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n(f)(x) - \sigma| < \varepsilon,$$

ce qui montre la première assertion du théorème. Si $\sigma_n(f)(x)$ converge uniformément vers $\sigma(x)$ pour $x \in A \subset \mathbb{T}^1$, le fait que (II.24) soit uniforme en x montre que la convergence de $S_n(f)$ est également uniforme. $\square$

On dit que la fonction 2π -périodique f sur $\mathbb{R}$ est C^1 par morceaux si il existe $-\pi < a_0 < a_1 < \dots < a_q \leq \pi$ tels que:

- Pour tout $j \in \{0, \dots, q\}$, f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[a_j, a_{j+1}]$ (avec la convention $a_{q+1} = a_0 + 2\pi$).
- Pour tout $j \in \{0, \dots, q\}$, la fonction f a une limite à droite et une limite à gauche en a_j .

Corollaire II.20 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction 2π -périodique de classe C^1 par morceaux. Alors pour tout x de $\mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Si de plus f est continue, la série de Fourier de f converge vers f uniformément.

Démonstration. Il suffit de montrer que f vérifie la condition II.23. Le théorème II.19, combiné avec les théorèmes II.18, pour la convergence simple, ou II.3 pour la convergence uniforme, permettront alors de conclure.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, non nul. on a

$$2\pi \hat{f}(k) = \int_{a_0}^{a_0+2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \sum_{j=0}^q \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Par intégration par parties,

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{i}{k} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t) e^{-ikt} dt - \frac{i}{k} (f(a_{j+1}^-) e^{-ika_{j+1}} - f(a_j^+) e^{-ika_j}),$$

ce qui montre que f vérifie (II.23). $\square$

Le théorème de Dirichlet a été démontré en 1829. Une deuxième version, plus générale du théorème a été obtenue par Jordan en 1881, avec l'hypothèse plus faible que f est à variation bornée. La preuve consiste à montrer (II.23) pour une telle fonction cf [6, Chap II.2].

Exercice II.21. En appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction de l'exercice II.12, calculer $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Mentionnons que la série de Fourier peut diverger en certains points de $\mathbb{T}^1$, même pour une fonction continue. De fait, pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{T}^1$ de mesure nulle, il existe une fonction continue f sur $\mathbb{T}^1$ qui diverge en tout point de E : voir [6, Chap 2 §3].

III. TRANSFORMATION DE FOURIER SUR L'ESPACE EUCLIDIEN

On considère maintenant le cas $G = \mathbb{R}^d$. On rappelle que les caractères sur $\mathbb{R}^d$ sont exactement les applications $e_\xi : x \mapsto e^{ix \cdot \xi}$. En identifiant e_ξ à ξ , on identifie le groupe dual de $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{R}^d$. La transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^d$ est alors donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

que l'on notera aussi $(\mathcal{F}f)(\xi)$. C'est une fonction continue et bornée de ξ dès que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dans cette définition, on a choisi comme mesure de Haar sur $\mathbb{R}^d$ la mesure de Lebesgue. On rencontre dans la littérature d'autres définitions de la transformation de Fourier, utilisant une autre mesure de Haar, ou une autre manière d'identifier $\mathbb{R}^d$ à son dual.

Exercice III.1. • Calculer la transformation de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[-1, +1]}$.

• Calculer la transformation de Fourier de la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)e^{-x}$.

Dans les deux cas $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un ensemble A .

III.1. Formule d'inversion de Fourier. On montre ici la formule d'inversion de Fourier:

Théorème III.2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{f}(-x).$$

Le fait que $\mathbb{R}^d$ ne soit ni compact, ni discret rend la preuve de la formule d'inversion de Fourier plus délicate. On commence par calculer la transformation de Fourier d'une gaussienne. On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$:

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2.$$

Proposition III.3. Soit $\lambda > 0$ et

$$G_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|^2}.$$

Alors

$$\widehat{G}_\lambda(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-|\xi|^2/(4\lambda)}.$$

Démonstration. On commence par effectuer le calcul dans le cas où $d = 1$. On note $G = G_\lambda$. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que $\widehat{G}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\frac{d\widehat{G}}{d\xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ix e^{-ix\xi} e^{-\lambda x^2} dx.$$

L'usage du théorème est justifié par domination à l'aide de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ qui décroît plus vite à l'infini que n'importe quel polynôme. En particulier $x e^{-\lambda x^2} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Comme $x e^{-\lambda x^2} = -\frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} e^{-\lambda x^2}$, on a

$$\frac{d\widehat{G}}{d\xi}(\xi) = \frac{i}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} e^{-\lambda x^2} dx$$

et une intégration par parties montre que

$$\frac{d\widehat{G}}{d\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\lambda x^2} dx.$$

Ainsi $\widehat{G}$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d\widehat{G}}{d\xi} = -\frac{\xi}{2\lambda} \widehat{G}$ avec condition initiale $\widehat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$. L'unique solution de ce problème est bien

$$\widehat{G}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}.$$

On passe au cas où $d \geq 2$. Le résultat est alors une conséquence directe du cas $d = 1$ et de la formule:

$$\int e^{-ix \cdot \xi} e^{-\lambda |x|^2} dx = \left(\int e^{-ix_1 \xi_1} e^{-\lambda x_1^2} dx_1 \right) \cdots \left(\int e^{-ix_d \xi_d} e^{-\lambda x_d^2} dx_d \right),$$

qui découle du théorème de Fubini. $\square$

Preuve du théorème I.23. On a:

$$\widehat{f}(-x) = \int e^{ix \cdot \xi} \left(\int e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy \right) d\xi$$

Toutefois, la fonction $(y, \xi) \mapsto e^{ix \cdot \xi} e^{-iy \cdot \xi} f(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}_y^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$ et on ne peut donc pas intervertir les intégrales par Fubini. On va procéder par approximation. On remarque que, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \underbrace{\int e^{ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi}_{I_\varepsilon} = \int e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Or, la fonction $(y, \xi) \mapsto e^{ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon |\xi|^2} e^{-iy \cdot \xi} f(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_y^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut donc lui appliquer le théorème de Fubini et obtenir :

$$I_\varepsilon = \int \left(\int e^{i(x-y) \cdot \xi} e^{-\varepsilon |\xi|^2} d\xi \right) f(y) dy.$$

D'après la Proposition III.3, on a

$$I_\varepsilon = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^d \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}} f(y) dy = (2\pi)^d k_\varepsilon * f,$$

où k_ε est donné par

$$k_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^d} k(x/\sqrt{\varepsilon}), \quad k(x) = (2\sqrt{\pi})^{-d} e^{-|x|^2/4}.$$

On vérifie que la famille $(k_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une famille d'approximation de l'identité, c'est à dire qu'on a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \int k_\varepsilon(y) dy &= 1 \\ \forall \delta > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \delta} k_\varepsilon(y) dy &= 0 \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |k_\varepsilon(y)| dy &< \infty. \end{aligned}$$

De la même manière que dans la preuve du théorème II.8, on obtient alors,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|I_\varepsilon(f) - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Ceci montre que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{f}(-x)$$

presque partout. Comme la fonction de droite de cette égalité est continue, on en déduit aussi que f s'identifie à une fonction continue, et que l'égalité a lieu pour tout x . $\square$

III.2. Dérivation et décroissance à l'infini. On montre ici que la différentiation d'une fonction se traduit par la multiplication de sa transformation de Fourier par un polynôme en ξ . Réciproquement, la multiplication par un polynôme en x se traduit par l'application d'un opérateur différentiel à sa transformation de Fourier.

Les propriétés de régularité d'une fonction se traduisent donc par des propriétés de décroissance de sa transformée de Fourier à l'infini et de manière symétrique, celle de décroissance d'une fonction à l'infini par des propriétés de régularité de sa transformation de Fourier.

Théorème III.4. *On fixe un entier $k \geq 1$.*

- (1) *Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ tel que pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq k$, $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors pour de tels multiindices,*

$$(III.1) \quad \widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

- (2) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $(1 + |x|)^k f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f}$ est de classe C^k , ses dérivées successives d'ordre $\leq k$ sont bornées, et*

$$(III.2) \quad \widehat{x^\alpha f} = (i\partial_\xi)^\alpha \hat{f}.$$

Démonstration. En raisonnant par récurrence, on voit qu'il suffit de montrer les résultats précédents pour $k = 1$, lorsque $|\alpha| = 1$. On commence par traiter le cas $d = 1$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est tel que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f'(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-ix\xi} f'(x) dx. \\ \int_{-A}^A e^{-ix\xi} f'(x) dx &= i\xi \int_{-A}^A e^{-ix\xi} f(x) dx + e^{-iA\xi} f(A) - e^{iA\xi} f(-A). \end{aligned}$$

Étant donné que f et f' sont dans L^1 , on en déduit que $e^{-iA\xi} f(A) - e^{iA\xi} f(-A)$ a une limite quand A tend vers $+\infty$. Puisque c'est également une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (par rapport à la variable A), cette limite est forcément nulle. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f'(x) dx = i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

soit $\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.

On considère maintenant la dimension $d \geq 2$. Quitte à changer l'ordre des coordonnées, on peut supposer $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, i.e. $x^\alpha = x_1$, $\partial_x^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\partial_{x_1} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, en notant $x' = (x_2, \dots, x_d)$,

$$\widehat{\partial_{x_1} f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1 \xi_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x') dx_1 dx'.$$

Par le théorème de Fubini, les applications

$$g_{x'} : x_1 \mapsto f(x_1, x') \text{ et } x_1 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x')e^{-ix_1\xi_1}$$

sont dans L^1 pour presque tout x' . Pour de tels x' , $g_{x'}$ vérifie les hypothèses du théorème avec $d = 1$. On a donc, pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1} \partial_{x_1} f(x_1, x') dx_1 = i\xi_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1} f(x_1, x') dx_1.$$

En multipliant par $e^{-ix' \cdot \xi'}$ et en intégrant, on obtient bien

$$\widehat{\partial_{x_1} f} = i\xi_1 \hat{f}$$

ce qui termine la preuve du premier point.

Le deuxième point s'obtient en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral à la formule définissant $\hat{f}$. $\square$

Corollaire III.5 (Riemann-Lebesgue). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Démonstration. Par le théorème précédent, le résultat est vrai pour $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$, à support compact. On en déduit le cas général $f \in L^1$ par densité de ces fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et l'inégalité:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}.$$

$\square$

III.3. Égalité de Plancherel.

Théorème III.6. *Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors $\hat{f} \in L^2$ et*

$$(III.3) \quad \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_{L^2}^2.$$

Démonstration. Par la preuve partielle du théorème I.26 et le théorème d'inversion III.2, l'égalité I.12 est vraie dès que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des fonctions vérifiant cette condition est dense dans $L^1 \cap L^2$, pour la norme L^2 . Or le théorème III.4 montre que pour toute fonction $f \in C^\infty$ à support compact, $\hat{f} \in L^1$. Par densité de ces fonctions dans L^2 , on en déduit donc Plancherel pour tout f dans $L^1 \cap L^2$. $\square$

Corollaire III.7. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ se prolonge en une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d, \frac{d\xi}{(2\pi)^d})$.*

Démonstration. Par le théorème III.6, on montre que $\mathcal{F}$ se prolonge en une isométrie de L^2 dans L^2 (avec la normalisation donnée dans l'énoncée). Il reste à vérifier la surjectivité de cette opération. Soit $\mathcal{F}L^2$ l'image de L^2 par la transformation de Fourier. Le fait que $\mathcal{F}$ soit une isométrie implique facilement que $\mathcal{F}L^2$ est fermé dans L^2 . De plus, par le théorème d'inversion de Fourier, $\mathcal{F}L^2$ contient toutes les fonctions C^∞ à support compact: si φ est une telle fonction, on a

$$\varphi(x) = c\hat{\varphi}(-\xi)$$

qui est l'image d'une fonction L^2 par la transformée de Fourier. Donc $\mathcal{F}L^2$ est dense dans L^2 ce qui conclut la preuve. $\square$

Donnons deux exemples de transformation de Fourier de fonctions qui sont dans $L^2(\mathbb{R})$, mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$

Exercice III.8. (1) Calculer la transformation de Fourier de la fonction sinus cardinal: $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

(2) Calculer la transformation de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+ix}$.

On pourra utiliser les résultats de l'exercice III.1.

III.4. Généralisation aux distributions tempérées. La théorie de la transformation de Fourier classique (sur L^1 et L^2) sur $\mathbb{R}^d$, esquissée jusqu'à maintenant laisse un goût d'inachevé. L'absence de symétrie et les hypothèses à rallonge de certains résultats a priori simples, tel que le Théorème III.4 suggère que cette théorie peut-être améliorée.

Dans le sillage de la théorie des distributions, formalisée par Laurent Schwartz, ce dernier a proposé une transformation de Fourier sur un espace beaucoup plus gros que L^1 , l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées, qui contient, par exemple, tous les espaces L^p , les fonctions continues à croissance polynomiale, les mesures boréliennes finies sur $\mathbb{R}^d$ etc... Dans la dernière partie de ce cours, nous esquissons très rapidement cette théorie. Nous renvoyons à l'ouvrage de Laurent Schwartz [8] pour un exposé détaillé.

L'espace des distributions tempérées est défini comme le dual d'un espace de fonction $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, parfois appelé espace de Schwartz:

Définition III.9. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions φ C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout entier p ,

$$N_p(\varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \leq p}} (1 + |x|)^p |\partial_x^\alpha \varphi(x)| < \infty.$$

On munit l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ d'une topologie définie par la distance suivante:

$$d(f, g) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} \min(N_p(f - g), 1).$$

Ainsi, la suite de fonction (f_n) converge vers f dans $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$\forall p \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^p |\partial_x^\alpha (f_n - f)(x)| = 0.$$

On vérifie facilement que cette topologie est compatible avec les opérations d'espace vectoriel, i.e. que $(\varphi, \psi, \lambda) \mapsto \varphi + \lambda\psi$ est une application continue de $\mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}$. On dit que $\mathcal{S}$ a une structure d'*espace vectoriel topologique*.

La proposition suivante se vérifie facilement avec le théorème III.4 et le théorème d'inversion de Fourier:

Proposition III.10. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme (continu et d'inverse continu) de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

On introduit maintenant l'espace des distributions tempérées:

Définition III.11. L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On peut vérifier que la forme linéaire L sur $\mathcal{S}$ est continue si et seulement si

$$\exists q \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad |\langle L, \varphi \rangle| \leq CN_q(f).$$

Donnons quelques exemples de distributions tempérées. Soit f une fonction mesurable, telle qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-q} dx < \infty.$$

On identifie f à un élément de $\mathcal{S}'$ en posant:

$$(III.4) \quad \langle I(f), \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

On montre que $I(f) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et que l'application $f \mapsto I(f)$ est injective, dans le sens où $I(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout. Cette application identifie chaque espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ ($p \in [1, \infty]$) à un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Notons que ceci permet également d'identifier l'espace des fonctions continues à croissance au plus polynômiale à un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la même formule.

Si μ est une mesure de Borel régulière telle que $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$, elle définit également un élément de $\mathcal{S}'$,

$$\varphi \mapsto \int \varphi d\mu.$$

C'est notamment le cas de la masse de Dirac en 0:

$$\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0).$$

Enfin, $\mathcal{S}'$ ne contient pas que des fonctions et des mesures. Si $f \in \mathcal{S}'$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la forme linéaire sur $\mathcal{S}$:

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha \varphi \rangle,$$

appelée *dérivée* de f d'ordre α , est un élément de $\mathcal{S}'$. Ceci prolonge la dérivée usuelle: si f est une fonction de classe C^k , $k = |\alpha|$, à support compact (pour fixer les idées) on a:

$$I(\partial_x^\alpha f) = \partial_x^\alpha I(f),$$

où I est défini par (III.4).

L'application

$$\delta'_0 : \varphi \mapsto -\varphi'(0)$$

est une distribution tempérée qui ne peut pas s'identifier à une fonction ou une mesure.

Exercice III.12. Vérifier toutes les assertions qui suivent la définition III.11.

On rappelle la formule de dualité de la transformée de Fourier:

$$\forall f, \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \int f \hat{\varphi} = \int \hat{f} \varphi.$$

On utilise cette formule pour définir la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Proposition III.13. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors la forme linéaire $\hat{f}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, définie par

$$(III.5) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$$

est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition III.14. La distribution tempérée $\hat{f}$ définie par (III.5) est appelé transformée de Fourier de f .

La proposition III.13 se démontre aisément avec la Proposition III.10. On vérifie que si $f \in L^1$ ou $f \in L^2$ la transformation de Fourier de f (au sens classique) et la transformation de Fourier de f identifié à I_f , au sens des distributions tempérées coïncident. Par exemple, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a, par la formule de dualité:

$$\langle \widehat{I(f)}, \varphi \rangle = \langle I(f), \widehat{\varphi} \rangle = \int f(x) \widehat{\varphi}(x) dx = \int \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \langle I(\hat{f}), \varphi \rangle,$$

et donc $\widehat{I(f)} = I(\hat{f})$ comme annoncé.

On a donc prolongé la transformation de Fourier à l'espace des distributions tempérées. Les résultats démontrés précédemment sur la transformation de Fourier classique se généralisent, par des raisonnements de dualité, à la transformation de Fourier sur les distributions tempérées. Donnons deux exemples.

Nous allons d'abord démontrer la formule d'inversion de Fourier dans ce contexte. Pour cela, si f est une distribution tempérée, on définit la distribution tempérée $f(-\cdot)$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle f(-\cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi(-\cdot) \rangle,$$

ou $\varphi(-\cdot)$ est la fonction $x \mapsto \varphi(-x)$. On remarque que

$$\widehat{\varphi(-\cdot)} = \widehat{\varphi}(-\cdot).$$

On a alors

Théorème III.15. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\hat{f}}(-\cdot).$$

Démonstration. Remarquons que par le théorème III.2, la formule d'inversion de Fourier

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{\widehat{\varphi}}(-x)$$

est valable pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, car une telle fonction est dans L^1 ainsi que sa transformée de Fourier. Le résultat annoncé en découle facilement. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^d} \langle f, \widehat{\widehat{\varphi}}(-\cdot) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \left\langle f, \widehat{\widehat{\varphi(-\cdot)}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \hat{\hat{f}}, \varphi(-\cdot) \rangle = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\hat{f}}(-\cdot), \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

□

On donne maintenant la généralisation du Théorème III.4 aux distributions tempérées.

Théorème III.16. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors:

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha f} = (i\partial_\xi)^\alpha \hat{f}.$$

Ici la distribution tempérée $x^\alpha f$ est définie par dualité:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle x^\alpha f, \varphi \rangle = \langle f, x^\alpha \varphi \rangle.$$

Exercice III.17. Démontrer le théorème précédent.

Exemple III.18. La fonction constante égale à 1, identifiée à une distribution par l'injection I précédente (que l'on omet maintenant de noter), est une distribution tempérée. Sa transformée de Fourier est donnée par:

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int \hat{\varphi}(x) dx = (2\pi)^d \varphi(0)$$

(par la formule d'inversion de Fourier). On a donc

$$\hat{1} = (2\pi)^d \delta_0.$$

En combinant avec le théorème III.16, on peut en déduire la transformation de Fourier de n'importe quel polynôme.

Par la formule d'inversion de Fourier, on obtient aussi

$$1 = \widehat{\delta_0},$$

ce qui se vérifie aussi par un calcul direct.

APPENDICE A. DÉMONSTRATION D'UN LEMME TECHNIQUE

On démontre ici le Lemme II.2. On va utiliser de manière répétée des sommes de Riemann de fonctions définies sur $\mathbb{T}$. On rappelle que si φ est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, la suite $(I_n(\varphi))_n$ définie par

$$I_n(\varphi) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

converge vers $\int_0^{2\pi} \varphi(y) dy$.

Soit $f \in B$ et $\varphi \in C^0(\mathbb{T})$. L'idée principale de la démonstration est d'approcher $F = f * \varphi$ par une suite de sommes de Riemann à valeur dans B . On pose donc, pour tout entier naturel n ,

$$F_n(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x - \frac{2k\pi}{n}\right) \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Remarquons que F_n est un élément de B . *Étape 1. Convergence dans L^1 .* On montre

$$(A.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - F\|_{L^1} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} F(x) - F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} \left(f(x-y) \varphi(y) - f\left(x - \frac{2k\pi}{n}\right) \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right) dy \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} \left(f(x-y) - f\left(x - \frac{2k\pi}{n}\right) \right) \varphi(y) dy \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f\left(x - \frac{2k\pi}{n}\right) \left(\varphi(y) - \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right) dy \end{aligned}$$

En prenant la valeur absolue, en intégrant par rapport à x , puis en intervertissant les intégrales, on obtient:

$$(A.2) \quad \|F - F_n\|_{L^1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} |\varphi(y)| \left\| f_{y - \frac{2k\pi}{n}} - f \right\|_{L^1} dy + \varepsilon_{1,n} \|f\|_{L^1},$$

où

$$\varepsilon_{1,n} = \sup_{|y-z| \leq \frac{\pi}{n}} |\varphi(y) - \varphi(z)|.$$

Puisque φ est continue et périodique, elle est uniformément continue, et donc $\lim_n \varepsilon_{1,n} = 0$. Notons:

$$\varepsilon_{2,n} = \sup_{|y| \leq 2\pi/n} \|f - f_y\|_{L^1},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (cf l'argument avant le lemme II.2).

Par (A.2),

$$\|F - F_n\|_{L^1} \leq \varepsilon_{2,n} \|\varphi\|_{L^1} + \varepsilon_{1,n} \|f\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui montre (A.1).

Étape 2. On montre que la suite $(F_{2^n})_n$ est de Cauchy dans B .

Soit n, J des entiers ≥ 1 . On va donner une borne de $\|F_{Jn} - F_n\|_B$. On écrit

$$F_{Jn}(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{J} \sum_{p=0}^{J-1} f\left(x - \frac{2\pi(J\ell + p)}{Jn}\right) \varphi\left(\frac{2\pi(J\ell + p)}{Jn}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} & F_{Jn}(x) - F_n(x) \\ &= \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{J} \sum_{p=0}^{J-1} \left[f\left(x - \frac{2\pi(J\ell + p)}{Jn}\right) \varphi\left(\frac{2\pi(J\ell + p)}{Jn}\right) - f\left(x - \frac{2\ell\pi}{n}\right) \varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[\frac{1}{J} \sum_{p=0}^{J-1} \left(f\left(x - \frac{2\pi(J\ell + p)}{Jn}\right) - f\left(x - \frac{2\ell\pi}{n}\right) \right) \varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{J} \sum_{p=0}^{J-1} f\left(x - \frac{2\pi(J\ell + p)}{Jn}\right) \left(\varphi\left(\frac{2\pi(J\ell + p)}{Jn}\right) - \varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

En notant

$$\varepsilon'_{1,n} = \sup_{|y| \leq 2\pi/n} \|f - f_y\|, \quad \varepsilon_{2,n} = \sup_{|y-z| \leq 2\pi/n} |\varphi(y) - \varphi(z)|,$$

on obtient

$$\|F_{Jn} - F_n\|_B \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \varepsilon'_{1,n} + \|f\|_B \varepsilon_{2,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit que la suite $(F_{2^n})_n$ est une suite de Cauchy dans B .

Étape 3. Preuve d'(II.10). Par l'étape 2, F_{2^n} a une limite, dans B , quand n tend vers $+\infty$. Par l'étape 1 et puisque B s'injecte continûment dans L^1 , cette limite est égale à F . En particulier, $F \in B$. On déduit de l'expressions de F_n :

$$\|F_n\|_B \leq \|f\|_B \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right),$$

ce qui donne, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$,

$$\|F\|_B \leq \|f\|_B \int_0^{2\pi} |\varphi(y)| dy.$$

Ceci conclut la preuve d'(II.10).

Étape 4. Preuve de (II.11).

On a

$$F_n(x) - \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right) f(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \left(f\left(x - \frac{2k\pi}{n}\right) - f(x)\right).$$

D'où

$$(A.3) \quad \left\| F_n - \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right) f \right\|_B \leq \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right| \left\| f_{\frac{2k\pi}{n}} - f \right\|_B.$$

Par l'étape 3 et la propriété de convergence des sommes de Riemann des fonctions continues, le terme de gauche de cette inégalité tend, après extraction d'une sous-suite, vers

$$\left\| F - f \int_0^{2\pi} \varphi(y) dy \right\|_B.$$

Le terme de droite est une somme de Riemann pour la fonction continue:

$$y \mapsto |\varphi(y)| \|f - f_y\|_B.$$

Il tend donc vers $\int_0^{2\pi} |\varphi| \|f - f_y\|_B dy$. En passant à la limite dans (A.3), on obtient donc (II.11), ce qui termine la preuve du lemme technique.

APPENDICE B. UNICITÉ DE LA MESURE DE HAAR

On donne ici la correction de l'exercice I.10, d'après [7]. Soit μ et μ' deux mesures régulières, positives et non nulles, invariantes par translation sur G . La mesure μ étant non nulle, il existe une fonction $g : G \rightarrow \mathbb{R}$, continue et à support compact, telle que $\int_G g d\mu = 1$. Posons

$$\lambda = \int_G g(-x) d\mu'(x).$$

Soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et à support compact. On a:

$$\begin{aligned} \int_G f d\mu' &= \int_G g(y) d\mu(y) \int_G f(x) d\mu'(x) = \int_G g(y) \int_G f(x+y) d\mu'(x) d\mu(y) \\ &= \int_G \int_G g(y) f(x+y) d\mu(y) d\mu'(x) = \int_G \int_G g(y-x) f(y) d\mu(y) d\mu'(x) \\ &= \int_G f(y) \int_G g(y-x) d\mu'(x) d\mu(y) = \lambda \int_G f(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mu' = \lambda\mu$. Puisque μ' est positive et non nulle, on a bien $\lambda > 0$.

Il reste à montrer que $\mu(A) = \mu(-A)$ pour tout borélien A de G . Pour cela, on remarque que l'application $A \mapsto \mu(-A)$ est une mesure positive régulière sur les boréliens de G , invariante par translation. Par ce qui précède, il existe $\lambda > 0$ tel que $\mu(A) = \lambda\mu(-A)$. En testant cet égalité sur un ouvert U de G de la forme $U = V \cup (-V)$, où V est un ouvert avec $\mu(V) > 0$, on obtient $\lambda = 1$, ce qui conclut la preuve.

RÉFÉRENCES

- [1] BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique. Fasc. XXIX: Intégration. Chap. 7 et 8: Mesure de Haar. convolution et représentation.* Paris: Hermann & Cie. 166 p. (1963)., 1963.
- [2] BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXII: Théories spectrales. Chap. 1 et 2: Algèbres normées. Groupes localement compacts commutatifs,* 1967.
- [3] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Paris: Masson, 1994.
- [4] GASQUET, C., AND WITOMSKI, P. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique, ondelettes.* Paris: Masson, 1995.
- [5] HEWITT, E., AND ROSS, K. A. *Abstract harmonic analysis. Vol. 1: Structure of topological groups; integration theory; group representations. 2nd ed,* vol. 115 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, Cham, 1979.
- [6] KATZNELSON, Y. *An introduction to harmonic analysis,* 3rd ed. ed. Camb. Math. Libr. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [7] RUDIN, W. *Fourier analysis on groups,* vol. 12 of *Intersci. Tracts Pure Appl. Math.* Interscience Publishers, New York, NY, 1962.
- [8] SCHWARTZ, L. *Théorie des distributions. Nouv. éd., entièrement corr., ref. + augm. (Nouv. tirage).* Paris: Hermann. 436 p. (1984)., 1984.
- [9] STEIN, E. M., AND SHAKARCHI, R. *Fourier analysis. An Introduction,* vol. 1 of *Princeton Lect. Anal.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.